ĐỀ 01 – GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+e^{2x}$ là

A. $\dfrac{x^2+e^{2x}}{2}+C$. **B.** $\dfrac{x^2+e^{x}}{2}+C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{e^{2x+1}}{2x+1}+C$. **D.** $\dfrac{x^2}{2}+2e^{2x}+C$.

Lời giải

Chọn A

Câu 2. Cho $\int\limits_0^2\left[f(x)-3x^2\right]\mathrm{d}x=4$. Tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** -4. **C.** 12. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$$\int\limits_0^2\left[f(x)-3x^2\right]\mathrm{d}x=4\Rightarrow\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^2 3x^2\mathrm{d}x=4\Rightarrow\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x-8=4\Rightarrow\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=12.$$

Câu 3. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-1		3		$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên tập nào dưới đây?

A. $(0;4)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng $(P): 2x-y+z-5=0$?

A. $M(1;-1;0)$. **B.** $N(1;-1;2)$. **C.** $P(1;-1;4)$. **D.** $Q(1;-1;3)$.

Lời giải

Chọn B

Thay tọa độ điểm N vào phương trình mặt phẳng, ta có: $2\cdot1-(-1)+2-5=0$.

Vậy $N\in(P)$.

Câu 5. Khảo sát trọng lượng của một số quả mít được trồng trong một nông trường ta có số liệu sau

Trọng lượng (kg)	[4;6)	[6;8)	[8;10)	[10;12)	[12;14)
Số quả	6	12	19	9	4

Tìm độ lệch tiêu chuẩn của mẫu số liệu trên. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 2,19. **B.** 8,72. **C.** 4,80. **D.** 2,20.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng thống kê cân nặng của các quả mít theo giá trị đại diện:

Cân nặng đại diện (kg)	5	7	9	11	13
Tần số	6	12	19	9	4

Cỡ mẫu $n=6+12+19+9+4=50$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x}=\frac{6.5+12.7+19.9+9.11+4.13}{50}=8,72.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{50}(6\cdot5^2+12\cdot7^2+19\cdot9^2+9\cdot11^2+4\cdot13^2)-8,72^2}\approx2,19.$$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(3;1;1)$. Đường thẳng AB có phương trình là

A. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{4}$. **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-2}$.

C. $\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{3}$. **D.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AB}=(3-1,1-(-2),1-3)=(2,3,-2)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua điểm $A(1,-2,3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(2,3,-2)$ là:

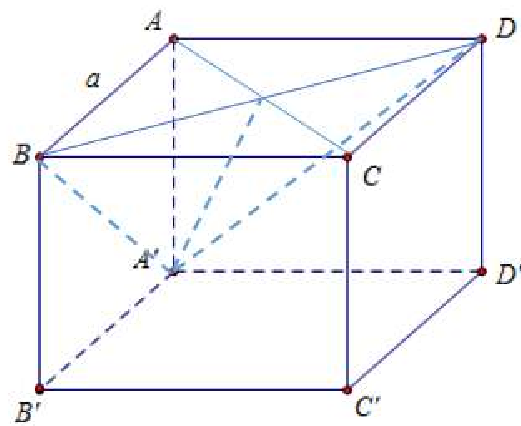
$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-2}$.

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Khoảng cách từ điểm A' đến đường thẳng BD bằng

A. $\sqrt{6}a$. **B.** $2a$. **C.** $\sqrt{5}a$. **D.** $2\sqrt{2}a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có tam giác $A'BD$ đều cạnh $2\sqrt{2}a$. Do đó: $d\left(A';BD\right)=A'O=\frac{\sqrt{3}}{2}.2\sqrt{2}a=\sqrt{6}a.$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$ và $B(-1;2;0)$. Trung điểm đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(0;0;2)$. **B.** $(-1;1;-1)$. **C.** $(1;1;1)$. **D.** $(0;1;1)$.

Lời giải

Chọn D

Trung điểm đoạn thẳng AB có tọa độ là $(0;1;1)$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)(x^2+x-2)(x-1)^4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=x^2(x+2)(x^2+x-2)(x-1)^4=x^2(x+2)^2(x-1)^5$.

Khi đó, $f'(x)=0$ có nghiệm kép $x=0;x=-2$ và nghiệm bội lẻ $x=1$ nên hàm số có một điểm cực trị $x=1$.

Câu 10. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_x 2+\log_{16} x=2$. Tích x_1x_2 bằng

A. 64. **B.** 256. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Đkxđ: $0 < x \neq 1$.

$\log_x 2 + \log_{16} x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{4}\log_2 x = 2 \Leftrightarrow \left(\log_2 x\right)^2 - 8\log_2 x + 4 = 0$.

Đặt $t = \log_2 x$ phương trình trở thành: $t^2 - 8t + 4 = 0$. Ta có $\Delta' > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2$ và $t_1 + t_2 = 8 \Rightarrow \log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 8 \Leftrightarrow \log_2\left(x_1 x_2\right) = 8 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 256$.

Câu 11. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{16\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh trục hoành là

$V = \pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{16\pi}{15}$..

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-1;2); B(2;0;1)$ và $C(0;-1;3)$. Giá trị của $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 0. **B.** -4. **C.** -2. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB} = (1;1;-1); \overrightarrow{AC} = (-1;0;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1 + 0 - 1 = -2.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$ và điểm $A(-1;-3)$.

a) Hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị.

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

c) Đường thẳng $y = x - 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

d) Xét điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$, đoạn thẳng AM có độ dài luôn lớn hơn $2,2$.

Lời giải

a) ĐÚNG.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$. TXĐ: $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - 1\left(x^2 - x - 1\right)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.(t/m) \Rightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị.

b) SAI.

BBT:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ ↗		-5	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

c) ĐÚNG.

Ta có: $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}=x-2+\dfrac{1}{x+1}$.

Mà: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=0$.

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y=x-2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

d) SAI.

Xét điểm $M\left(a;\, a-2+\dfrac{1}{a+1}\right)$ $(a\neq -1)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$. Khi đó:

$\overrightarrow{AM}=\left(a+1; a+1+\dfrac{1}{a+1}\right)$ $\quad\Rightarrow AM^2=(a+1)^2+\left(a+1+\dfrac{1}{a+1}\right)^2=(a+1)^2+(a+1)^2+2+\dfrac{1}{(a+1)^2}$

$=2(a+1)^2+\dfrac{1}{(a+1)^2}+2\geq 2\sqrt{2(a+1)^2.\dfrac{1}{(a+1)^2}}+2=2\sqrt{2}+2 \Rightarrow AM\geq\sqrt{2\sqrt{2}+2}\approx 2{,}198$..

Câu 2. Một ô tô đang di chuyển với tốc độ 20 (m/s) thì người lái xe hãm phanh nên ô tô chạy chậm dần đều với gia tốc $a=-4\ m/s^2$ cho đến khi ô tô dừng hẳn.

a) Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)=20-5t\ (m/s)$ cho đến khi ô tô dừng hẳn, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc hãm phanh.

b) Tốc độ của ô tô sau khi hãm phanh 2 giây là $10\ (m/s)$.

c) Sau khi hãm phanh 5 giây thì ô tô dừng hẳn.

d) Kể từ khi hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô đi được quãng đường 50 m.

Lời giải

a) Sai.

Sau khi hãm phanh thì $v(t)=\int a dt=\int -4dt=-4t+C$.

Mà $v(0)=20$ nên $C=20$.

Do đó $v(t)=20-4t\ (m/s)$

b) Sai.

Tốc độ của ô tô sau khi hãm phanh 2 giây là $v(2)=12\ (m/s)$.

c) Đúng.

Khi ô tô dừng hẳn thì $v(t)=0 \Leftrightarrow t=5$.

Vậy sau khi hãm phanh 5 giây thì ô tô dừng hẳn.

d) Đúng.

Quãng đường ô tô đi được từ khi hãm phanh đến khi dừng hẳn là

$\int_0^5 v(t)dt=\int_0^5(20-4t)dt=50(m)$.

Câu 3. Một nhà máy có hai phân xưởng A và B tương ứng làm ra 60% và 40% sản phẩm của nhà máy. Tỉ lệ phế phẩm của hai phân xưởng A và B lần lượt là 1% và 2%. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy.

a) Nếu sản phẩm chọn ra thuộc phân xưởng A thì xác suất để nó không là phế phẩm là 0,98.

b) Xác suất để sản phẩm chọn ra là phế phẩm và thuộc phân xưởng A là 0,006.

c) Xác suất để sản phẩm chọn ra là phế phẩm là 0,014.

d) Nếu sản phẩm chọn ra là phế phẩm thì xác suất để nó thuộc phân xưởng A là $\frac{4}{7}$.

Lời giải

Gọi M là biến cố "chọn được sản phẩm mà nó từ phân xưởng A ".

Suy ra $\overline{M}$ là biến cố "chọn được sản phẩm mà nó từ phân xưởng B ".

Gọi N là biến cố "sản phẩm chọn ra là phế phẩm".

Suy ra $\overline{N}$ là biến cố "sản phẩm chọn ra không là phế phẩm".

Khi đó ta có: $P(M)=0,6;P(\overline{M})=0,4;\quad P(N\mid M)=1\%=0,01;P(\overline{N}\mid M)=0,99;$

$P(N\mid \overline{M})=2\%=0,02;P(\overline{N}\mid \overline{M})=0,98.$

Khi đó ta có:

a) Sai.

Xác suất để sản phẩm chọn ra là phế phẩm và thuộc phân xưởng A là

$P(\overline{N}\mid M)=0,99.$

b) Đúng.

Sản phẩm chọn ra là phế phẩm và thuộc phân xưởng A có xác suất là:

$P(NM)=P(N\mid M).P(M)=0,01.0,6=0,006.$

c) Đúng.

Xác suất để sản phẩm chọn ra là phế phẩm là

$P(N)=P(N\mid M).P(M)+P(N\mid \overline{M}).P(\overline{M})\ =0,01.0,6+0,02.0,4=0,14.$

d) Sai.

Nếu sản phẩm chọn ra là phế phẩm thì xác suất để nó thuộc phân xưởng A là:

$P(M\mid N)=\frac{P(MN)}{P(N)}=\frac{0,006}{0,14}=\frac{3}{70}.$

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất. Một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(-40;5;2)$ và chuyển động thẳng đến điểm $B(808;-101;426)$ với tốc độ là $6m/s$.

a) Điểm $M(384;-48;214)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Vectơ $\vec{u}=(8;1;4)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

c) Thời gian cabin cáp treo đi từ A đến B là 2 phút 39 giây.

d) Sau khi di chuyển từ A được 1 phút, cabin cáp treo cách mặt đất 162 mét.

Lời giải

a) Đúng.

Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $\begin{cases} x_M=\frac{-40+808}{2}=384 \\ y_M=\frac{5-101}{2}=-48 \\ z_M=\frac{2+426}{2}=214 \end{cases}$.

Vậy $M(384;-48;214)$.

b) Sai.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(808+40;-101-5;426-2)=(848;-106;424)=106.(8;-1;4)$.

$\overrightarrow{AB}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Xét $\vec{u}=(8;1;4)$ và $\overrightarrow{AB}$, ta có: $\frac{848}{8}\neq\frac{-106}{1}$. Suy ra $\vec{u}$ không cùng phương $\overrightarrow{AB}$.

Vậy $\vec{u}$ không là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

c) Đúng.

Ta có: $AB=\sqrt{848^2+(-106)^2+424^2}=954m$.

Suy ra thời gian đi từ A đến B là: $t_{AB}=\frac{AB}{6}=159$ giây $=2$ phút 39 giây.

d) Đúng.

Đổi đơn vị: 1 giờ $=$ 60 phút.

Gọi C là vị trí cabin sau khi di chuyển được 1 phút.

Ta có: $\frac{AC}{AB}=\frac{60}{159}=\frac{20}{53}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\frac{20}{53}\overrightarrow{AB}$.

Suy ra: $\begin{cases}x_C=\frac{20}{53}.848+(-40)=280\\ y_C=\frac{20}{53}.(-106)+5=-35\\ x_C=\frac{20}{53}.424+2=162\end{cases}$.

Vậy sau khi di chuyển từ A được 1 phút, cabin cáp treo cách mặt đất một khoảng là:
$x_C=160m$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 3, $SA\perp(ABCD)$ và $SC=3\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có $SA^2=SC^2-AC^2=(3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2=9\Rightarrow SA=3$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V=\frac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot3\cdot3^2=9$.

Câu 2. Một cốc hình trụ có đường kính đáy bằng 7 cm, chiều cao 15 cm. Trong cốc chứa một lượng nước bằng $\frac{2}{3}$ thể tích cốc. Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá 3 cm. Con quạ thông minh đã mổ những viên sỏi hình cầu có bán kính $0,9$ cm thả vào cốc để mực nước dâng lên. Hỏi để uống được nước, con quạ cần thả ít nhất bao nhiêu viên sỏi?

Lời giải

Đáp án: 26

Bán kính đáy của cốc là $r=3,5$ cm.

Thể tích lượng nước ban đầu trong cốc là $V_1=\pi r^2.h_1=\pi.3,5^2.\frac{2}{3}.15=\frac{245}{2}\pi$.

Thể tích lượng nước tối thiểu có trong cốc để con quạ có thể uống được là
$V_2=\pi r^2.h_2=\pi.3,5^2.(15-3)=147\pi$.

Gọi $n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ là số viên sỏi bỏ vào cốc.

Tổng thể tích các viên sỏi hình cầu được thả vào cốc là $V_3=n.\frac{4}{3}\pi r_c^3=n.\frac{4}{3}\pi.0,9^3=n.\frac{243}{250}\pi$.

Con quạ có thể uống được nước khi
$V_1+V_3\geq V_2\Leftrightarrow\frac{245}{2}\pi+n.\frac{243}{250}\pi\geq147\pi\Leftrightarrow n\geq25,2$.

Vậy để uống được nước, con quạ cần thả ít nhất 26 viên sỏi.

Câu 3. Nhiệt độ $\theta_1\left({}^\circ C\right)$, của một loại vi sóng sau khi bật lên t phút được xác định bởi hàm số $\theta_1 = 320 - 290e^{-0,05t}$, $t \geq 0$.

Nhiệt độ $\theta_2\left({}^\circ C\right)$, của một loại vi sóng khác sau khi bật lên t phút được xác định bởi hàm số $\theta_2 = 270 - 240e^{-0,1t}$, $t \geq 0$.

Hỏi nếu hai lò vi sóng của hai loại được bật lên cùng một lúc thì sau bao nhiêu phút nhiệt độ của hai lò vi sóng bằng nhau? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 31

Nhiệt độ của hai lò vi sóng bằng nhau nên ta có

$320 - 290e^{-0,05t} = 270 - 240e^{-0,1t}$

$\Leftrightarrow 29e^{-0,05t} - 24e^{-0,1t} - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 29e^{-0,05t} - 24\left(e^{-0,05t}\right)^2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^{-0,05t} = 1 \\ e^{-0,05t} = \dfrac{5}{24} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 31,37 \end{array}\right.$

Vì lò vi sóng được bật lên sau một thời gian nên $t \approx 31 > 0$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;\,0;\,1); B(3;\,0;\,0); C(1;\,1;\,0)$ và $D(5;\,1;\,1)$. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC).

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;0;-1)$; $\overrightarrow{AC} = (0;1;-1)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = (1;\,2;\,2)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) $d = \dfrac{|1.5 + 2.1 + 2.1 - 3|}{\sqrt{1+4+4}} = 2$.

Câu 5. Trong một giải thi đấu bóng chuyền, đội bóng chuyền của Hà Nội sẽ thi đấu hai trận. Trận thứ nhất đội bóng chuyền của Hà Nội có xác suất thắng là 0,6. Trận tiếp theo, xác suất chiến thắng của họ phụ thuộc vào kết quả của trận trước. Nếu dội bóng chuyền của Hà Nội thắng trận trước thì họ sẽ hưng phấn và xác suất để họ thắng là 0,7. Nếu đội bóng chuyền của Hà Nội thua trận trước thì họ sẽ mất tinh thần và xác suất để họ thắng là 0,5. Tính xác suất để đội bóng chuyền của Hà Nội thắng trận thứ hai.

Lời giải

Trả lời: $0,62$

Gọi A là biến cố đội Hà Nội thắng trận thứ nhất, B là biến cố đội Hà Nội thắng trận thứ hai. Ta có: $P(A) = 0,6, P(\overline{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$. Xác suất thắng trận thứ hai phụ thuộc vào kết quả trận đầu: $P(B \mid A) = 0,7$ và $P(B \mid \overline{A}) = 0,5$.

Sử dụng công thức xác suất toàn phần, ta có: $P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \overline{A})P(\overline{A})$. Thay các giá trị đã biết vào công thức, ta được: $P(B) = 0,7 \times 0,6 + 0,5 \times 0,4 = 0,42 + 0,2 = 0,62$..

Câu 6. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 400 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm $(1 \leq x \leq 400)$ thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng). Trong đó chi phí vận hành máy móc cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \dfrac{100000x}{\frac{3}{2}x + 1}$ (đồng). Tổng chi phí mua nguyên vật liệu là $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$ (đồng) nhưng do doanh nghiệp đó mua nguyên vật liệu với số lượng lớn nên được giảm 1% cho 200 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 2% cho sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải

Trả lời: 253

Giả sử lợi nhuận thu được của doanh nghiệp sau khi sản xuất và bán được x sản phẩm là $T(x)$

Khi đó hàm $T(x)$ được biểu diễn:

$$T(x)=\begin{cases} F(x)-xG(x)-0,99.H(x) \text{ khi } 1\le x\le 200 \\ F(x)-xG(x)-0,99.H(200)-0,98.H(x-200) \text{ khi } 200\le x\le 400 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $1\le x\le 200$

$$T(x)=x^3-1999x^2+1001000x+250000-x\frac{100000x}{\frac{3}{2}x+1}-0,99\left(2x^3+100000x-50000\right)$$

$T'(x)=0\Leftrightarrow x=259$, suy ra $T_{\max}=T(200)\approx 79610463$.

Trường hợp 2: $200\le x\le 400$

$$T(x)=x^3-1999x^2+1001000x+250000-x\frac{100000x}{\frac{3}{2}x+1}-35590500$$

$$-0,99\left[2(x-200)^3+100000(x-200)-50000\right]$$

$T'(x)=0\Leftrightarrow x=253$, suy ra $T_{\max}=T(253)\approx 83893648$.

Ta thấy $T(253)>T(200)$ nên doanh thu lớn nhất khi sản xuất được 253 sản phẩm.

HẾT

ĐỀ 02 – GIẢI

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^4-3x^2+1$ là

A. $F(x)=\frac{3}{5}x^5-x^3+x+C$. **B.** $F(x)=12x^3-6x$.

C. $F(x)=\frac{3}{4}x^5-\frac{3}{2}x^3+x+C$. **D.** $F(x)=\frac{3}{5}x^5-x^3+x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int(3x^4-3x^2+1)dx=3\frac{x^5}{5}-3\frac{x^3}{3}+x+C=\frac{3}{5}x^5-x^3+x+C$.

Câu 2. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=5^x, y=0, x=-2$ và $x=2$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành do hình phẳng D quay quanh trục hoành được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $V=\int_{-2}^{2}5^{2x}dx$. **B.** $V=\pi\int_{-2}^{2}25^x dx$. **C.** $V=\pi\int_{-2}^{2}5^x dx$. **D.** $V=\int_{-2}^{2}|5^x|dx$.

Lời giải

Chọn B

Ta có thể tích khối tròn xoay đó là: $V=\pi\int_{-2}^{2}(5^x)^2dx=\pi\int_{-2}^{2}25^x dx$.

Câu 3. Kết quả kiểm tra định kỳ môn Toán của 40 học sinh lớp 12 D được thống kê ở bảng sau:

Nhóm	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$
Tần số	3	5	5	25	2

Phương sai của mẫu số liệu trên là

A. $4,52$. **B.** $5,12$. **C.** $3,65$. **D.** $4,19$.

Lời giải

Chọn D

Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là:

$\bar{x}=\frac{1.3+3.5+5.5+7.25+9.2}{40}=5,9$.

Phương sai của mẫu số liệu trên là:

$$S^2=\frac{3.(5,9-1)^2+5.(5,9-3)^2+5.(5,9-5)^2+25.(5,9-7)^2+2.(5,9-9)^2}{40}\approx 4,19.$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$ có phương trình:

A. $d:\begin{cases}x=0\\y=2t\\z=3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **B.** $d:\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **C.** $d:\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **D.** $d:\begin{cases}x=t\\y=3t\\z=2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$ là:

$$d:\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=3t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$ có dạng

A. $x+2y+z-4=0$. **B.** $2x+y+2z-2=0$.

C. $x+2y+z-2=0$. **D.** $2x+y+2z+2=0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$ theo đoạn chắn là:

$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1 \Leftrightarrow 2x+y+2z-2=0$.

Câu 6. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-3x+2}{x+3}$ là:

A. $y=x+6$. **B.** $y=2x-3$. **C.** $y=-x+6$. **D.** $y=x-6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=\frac{x^2-3x+2}{x+3}=\frac{x^2+3x-6x-18+20}{x+3}=x-6+\frac{20}{x+3}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-(x-6)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{20}{x+3}=0$.

Do đó đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-3x+2}{x+3}$ là $y=x-6$.

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x>4$

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^x>4 \Leftrightarrow x<\log_{\frac{1}{2}}4 \Leftrightarrow x<-2$.

Câu 8. Phương trình $\log_3(x-1)=2$ có nghiệm là

A. $x=10$. **B.** $x=8$. **C.** $x=7$. **D.** $x=9$.

Lời giải

Chọn A

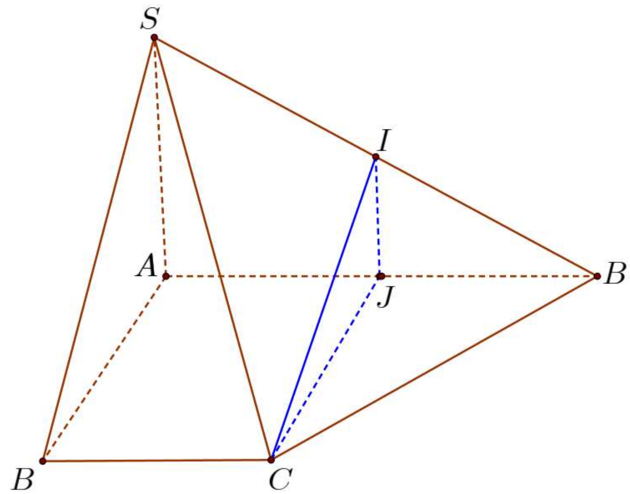
Ta có: $\log_3(x-1)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-1=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x=10 \end{cases}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB//CD)$ và $AB=2CD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm SB và AB. Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD)?

A. (BCI). **B.** (BIJ). **C.** (CIJ). **D.** (SJC).

Lời giải

Chọn C



Xét tứ giác $AJCD$ ta có: $AJ//CD$ và $AJ=CD=\frac{1}{2}AB$ nên tứ giác $AJCD$ là hình bình hành suy ra $CJ//AD$.

Mặt khác: IJ là đường trung bình của ΔSAB nên $IJ//SA$

Suy ra: $(SAD)//(CIJ)$.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_2=3$ và $u_4=7$. Giá trị của u_{15} bằng

A. 27. **B.** 29. **C.** 35. **D.** 31.

Lời giải

Chọn B

Xét $\begin{cases} u_2=3 \\ u_4=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+d=3 \\ u_1+3d=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=1 \\ d=2 \end{cases}$. Suy ra: $u_{15}=u_1+14d=29$.

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

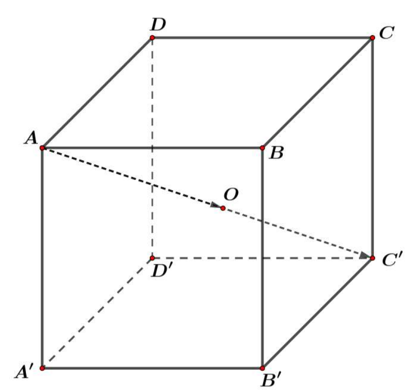
B. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

D. $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

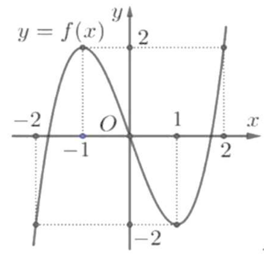
Lời giải

Chọn B



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Câu 12. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ, hàm số nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $(-1;1)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi xuống trên khoảng $(-1;1)$ nên hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3}\,x$.

a) [1] Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = -2\sin 2x + \sqrt{3}$.

b) [2] Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm trên đoạn $[0;\pi]$ là $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{2\pi}{3}$.

c) [3] Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$.

d) [4] Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\pi\right]$ là $1+\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

a) Đúng.

Vì $f'(x) = \left(\cos 2x + \sqrt{3}\,x\right)' = -(2x)'\sin 2x + \sqrt{3} = -2\sin 2x + \sqrt{3}$.

b) Sai.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin 2x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $x \in [0;\pi] \Rightarrow 0 \le \frac{\pi}{6} + k\pi \le \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \le k \le \frac{5}{6} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Và $0 \le \frac{\pi}{3} + k\pi \le \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le k \le \frac{2}{3} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm trên đoạn $[0;\pi]$ là $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{\pi}{6}$.

c) Đúng.

Xét $y' = -2\sin 2x + \sqrt{3}$ ta có $\forall x \in \left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \forall 2x \in \left(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -2\sin 2x < -\sqrt{3} \Leftrightarrow -2\sin 2x + \sqrt{3} < 0 \Rightarrow y' < 0$.

Vậy hàm số $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3}\,x$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$.

d) Đúng.

Ta có $f'(x) = -2\sin 2x + \sqrt{3} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin 2x + \sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $x \in \left[\frac{\pi}{6};\pi\right] \Rightarrow \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{6} + k\pi \le \pi \Leftrightarrow 0 \le k \le \frac{5}{6} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{3} + k\pi \le \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \le k \le \frac{2}{3} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

Vì hàm số $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3}x$ liên tục trên $\left[\frac{\pi}{6};\pi\right]$ và

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}.\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}.\frac{\pi}{6} \approx 1,4$; $f(\pi) = \cos 2\pi + \sqrt{3}.\pi = 1 + \sqrt{3}.\pi \approx 6,44$;

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}.\frac{\pi}{3} = \frac{-1}{2} + \sqrt{3}.\frac{\pi}{3} \approx 1,31$ nên giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\pi\right]$ là $1 + \sqrt{3}\pi$.

Câu 2. Một xe ô tô đang chạy với tốc độ $72\,km/h$ thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó $80\,m$. Người lái xe phản ứng 1 giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = at + b\,(m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Biết rằng xe dừng hẳn sau 3 giây kể từ khi bắt đầu đạp phanh.

a) [1] Khi ô tô bắt đầu đạp phanh, khoảng cách ô tô đến chướng ngại vật là $60\,m$.

b) [2] Giá trị của b là 20.

c) [3] Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây $(0 \le t \le 3)$ kể từ khi đạp phanh được tính theo công thức $S(t) = -\frac{10}{3}t^2 + 20t$.

d) [4] Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là $45\,m$.

Lời giải

a) Đúng.

Ta có $72\,km/h = 20\,m/s$.

Quãng đường người lái xe phản ứng 1 giây là: $s = 20\,m$.

Khi ô tô bắt đầu đạp phanh, khoảng cách ô tô đến chướng ngại vật là: $80 - 20 = 60\,m$.

b) Đúng

Xe ô tô đang chạy với tốc độ $20\,m/s$ thì đạp phanh tức là

$v(0) = 20 \Leftrightarrow a.0 + b = 20 \Rightarrow b = 20$.

c) Đúng.

Xe dừng hẳn sau 3 giây kể từ khi bắt đầu đạp phanh nên $v(3) = 0 \Leftrightarrow a.3 + b = 0$.

Từ ý của câu **b)** thay vào ta có $a = \frac{-20}{3}$.

Vậy ô tô chuyển động với vận tốc $v(t) = \frac{-20}{3}t + 20\,(m/s)$.

Quãng đường mà ô tô đi được trong thời gian t giây $(0 \le t \le 3)$ kể từ khi đạp phanh được tính theo công thức $S(t) = \int_0^t \left(\frac{-20}{3}t + 20\right) = -\frac{10}{3}t^2 + 20t$.

d) Sai.

Quãng đường xe ô tô đi được sau 3 giây kể từ khi bắt đầu đạp phanh là

$S(3) = -\frac{10}{3}.3^2 + 20.3 = 30\,m$.

Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là $S = 30 + 20 = 50\,m$.

Câu 3. Biểu đồ bên dưới thống kê theo nhóm chiều cao (đơn vị: cm) của các vận động viên của hai đội bóng rổ Sao La và Kim Ngưu

Chiều cao (cm)	$[170;175)$	$[175;180)$	$[180;185)$	$[185;190)$	$[190;195)$
Đội Sao La	2	4	5	5	4
Đội Kim Ngưu	2	3	4	10	1

a) **[1]** Theo số trung bình chiều cao của hai đội bóng xấp xỉ nhau.
b) **[2]** Theo trung vị, chiều cao của đội Kim Ngưu cao hơn so với đội Sao La .
c) **[3]** Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên bất kì của đội Sao La để phỏng vấn, xác suất để thành viên đó không thấp hơn 190cm là $\frac{1}{5}$.
d) **[4]** Chọn ngẫu nhiên mỗi đội 1 thành viên lên sân khấu giao lưu. Xác suất để hai cầu thủ cùng trong một nhóm chiều cao là $\frac{1}{4}$

Lời giải

Chiều cao (cm)	$[170;175)$	$[175;180)$	$[180;185)$	$[185;190)$	$[190;195)$
Lớp đại diện	172,5	177,5	182,5	187,5	192,5
Đội Sao La	2	4	5	5	4
Đội Kim Ngưu	2	3	4	10	1

a) **G**ọi X là số trung bình chiều cao của đội Sao La:
$$X = \frac{172,5.2 + 177,5.4 + 182,5.5 + 187,5.5 + 192,5.4}{20} = 183,75$$
gọi Y là số trung bình chiều cao của đội Kim Ngưu:
$$Y = \frac{172,5.2 + 177,5.3 + 182,5.4 + 187,5.10 + 192,5.1}{20} = 183,75$$
vậy $X = Y = 183,75$

b) **N**hóm trung vị chiều cao của đội Sơn La: $[180;185)$

ta có: $M_e = 180 + \frac{10-6}{5}.5 = 184$

nhóm trung vị chiều cao của đội Kim Ngưu: $[185;190)$

ta có: $M_e = 185 + \frac{10-9}{10}.5 = 185,5$

c) Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên của đội Sơn La: có 20 cách
Chọn được thành viên không thấp hơn 190cm có: 4 cách
Vậy xác suất : $P = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

d) Chọn ngẫu nhiên mỗi đội 1 thành viên lên sân khấu giao lưu có: $20.20 = 400$ cách
Chọn hai cầu thủ cùng trong một nhóm chiều cao:

TH1: Nhóm $[170;175)$ có: $2.2=4$ cách

TH2: Nhóm $[175;180)$ có: $4.3=12$ cách

TH3: Nhóm $[180;185)$ có: $5.4=20$ cách

TH4: Nhóm $[185;190)$ có: $5.10=50$ cách

TH5: Nhóm $[190;195)$ có: $4.1=4$ cách

Vậy xác suất để hai cầu thủ cùng trong một nhóm chiều cao là $P=\dfrac{4+12+20+50+4}{400}=\dfrac{9}{40}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(0;0;-1), B(-1;1;0), C(1;0;1)$.

a) [1] Đường thẳng AB nhận $\vec{u}=(1;2;1)$ làm vectơ chỉ phương.

b) [2] Đường thẳng AC có phương trình $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-1+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

c) [3] Mặt phẳng (P) có phương trình $2x+3y+z-2005=0$ song song với mặt phẳng (ABC).

d) [4] Điểm $N\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$ là điểm thỏa mãn $3NA^2+2NB^2-NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Sai.

Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$ làm vectơ chỉ phương mà $\vec{u}=(1;2;1)$ không cùng phương với $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$ nên $\vec{u}=(1;2;1)$ không là vectơ chỉ phương của AB.

b) Đúng.

Đường thẳng AC có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AC}=(1;0;2)$ và đi qua điểm $A(0;0;-1)$ nên có phương trình $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-1+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

c) Sai.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1);\overrightarrow{AC}=(1;0;2)$ suy ra mặt phẳng (ABC) có VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(2;3;-1)$

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(2;3;1)$ không cùng phương với $\vec{n}=(2;3;-1)$ nên (P) không song song với (ABC).

d) Đúng.

Gọi I là điểm sao cho $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Khi đó $\begin{cases} x_I=\dfrac{3x_A+2x_B-x_C}{4}=\dfrac{3.0+2.(-1)-1}{4}=\dfrac{-3}{4} \\ y_I=\dfrac{3y_A+2y_B-y_C}{4}=\dfrac{3.(0)+2.1-0}{4}=\dfrac{1}{2} \\ z_I=\dfrac{3z_A+2z_B-z_C}{4}=\dfrac{3.(-1)+2.0-1}{4}=-1 \end{cases}$

Suy ra $I\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Ta có $3NA^2+2NB^2-NC^2=3\overrightarrow{NA}^2+2\overrightarrow{NB}^2-\overrightarrow{NC}^2$

$=3\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=4\overrightarrow{NI}^2+2\overrightarrow{NI}\left(3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)+3\overrightarrow{IA}^2+2\overrightarrow{IB}^2-\overrightarrow{IC}^2$

$=4\overrightarrow{NI}^2+3\overrightarrow{IA}^2+2\overrightarrow{IB}^2-\overrightarrow{IC}^2=4NI^2+3IA^2+2IB^2-IC^2$.

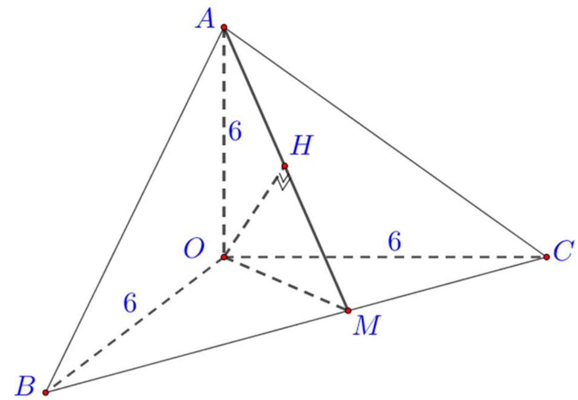
Do đó $3NA^2+2NB^2-NC^2$ nhỏ nhất khi NI nhỏ nhất suy ra $N\equiv I$. Do đó $N\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=OB=OC=6$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC). Khi đó độ dài OH bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

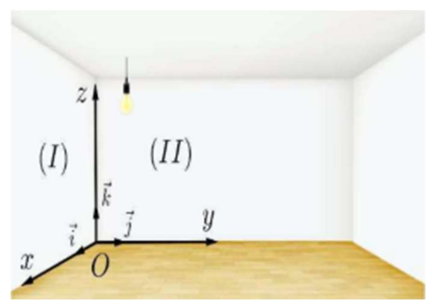
Đáp số: $3,46$.



Ta có H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC): $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

Suy ra $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\Rightarrow OH=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\approx 3,46$.

Câu 2. Một phòng học có dạng hình hộp chữ nhật. Một bóng đèn được treo cách sàn $2,5m$, cách hai bức tường (I) và (II) lần lượt là $1\ m$ và $1,5\,m$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O là góc chân tường, các véc tơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ như hình vẽ, đơn vị trên trục là mét. Khi đó tọa độ bóng đèn có dạng $D(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $S=a+2b+3c$.



Lời giải

Đáp số: 11

Ta có tọa độ bóng đèn có dạng $D(a;b;c)$; vì bóng đèn được treo cách sàn $2,5m$, cách hai bức tường (I) và (II) lần lượt là $1\ m$ và $1,5m$ nên $D(1,5;1;2,5)$ nên $a=1,5;b=1;c=2,5$.

Khi đó: $S=a+2b+3c=1,5+2.1+3.2,5=11$.

Câu 3. Ban tổ chức lễ hội khinh khí cầu Ninh Bình sử dụng dịch vụ chụp ảnh bằng Flycam phục vụ du khách. Xét trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (mỗi đơn vị trên trục là một kilômét), Flycam sẽ xuất phát từ vị trí của Ban tổ chức là điểm $I(3;0;0)$, bay đến vị trí được yêu cầu chụp ảnh trong bán kính không quá 3 km. Trong một tình huống, khinh khí cầu thứ nhất đang ở vị trí $M(5;4;4)$, có vận tốc bay là 20 km/h, khinh khí cầu thứ hai đang ở vị trí $N(6;0;3)$, có vận tốc bay là 10 km/h. Hai người bạn trên hai khinh khí cầu này muốn chọn một vị trí $A(a;b;c)$ để chụp ảnh bằng Flycam của ban tổ chức sao cho tổng thời gian bay của hai khinh khí cầu đến A là nhỏ nhất (*giả thiết đường bay của khinh khí cầu là đường thẳng*). Tính $S=a+b+c$.

Lời giải

Đáp số: 7,6

Phương trình mặt cầu tâm I, bán kính bằng 3 là $(S):(x-3)^2+y^2+z^2=9$.

Để tổng thời gian bay của hai khinh khí cầu đến A là nhỏ nhất thì điểm A nằm trên mặt cầu (S), ta có: $(a-3)^2+b^2+c^2=9\Leftrightarrow(a-3)^2+b^2+c^2-9=0$.

Ta có: $AM=\sqrt{(a-5)^2+(b-4)^2+(c-4)^2}$.

$AN=\sqrt{(a-6)^2+b^2+(c-3)^2}$.

Tổng thời gian bay của hai khinh khí cầu đến A là: $\dfrac{AM}{20}+\dfrac{AN}{10}=\dfrac{1}{20}(AM+2AN)$.

Khi đó $AM+2AN=\sqrt{(a-5)^2+(b-4)^2+(c-4)^2}+2\sqrt{(a-6)^2+b^2+(c-3)^2}$

$=\sqrt{(a-5)^2+(b-4)^2+(c-4)^2+3\left[(a-3)^2+b^2+c^2-9\right]}+2\sqrt{(a-6)^2+b^2+(c-3)^2}$

$=2\sqrt{\left(a-\dfrac{7}{2}\right)^2+(b-1)^2+(c-1)^2}+2\sqrt{(a-6)^2+b^2+(c-3)^2}$

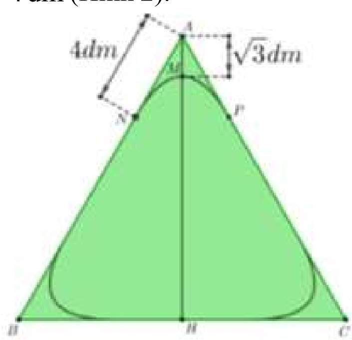
$=2PA+2NA\geq 2PN$ với $P\left(\dfrac{7}{2};1;1\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{1}{20}(AM+2AN)$ bằng $\dfrac{3\sqrt{5}}{20}$ khi $\begin{cases}A=PN\cap(S)\\ \overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PN}\,(k>0)\end{cases}\Rightarrow A\left(5;\dfrac{2}{5};\dfrac{11}{5}\right)$.

Vậy $a+b+c=\dfrac{38}{5}=7,6$.

Câu 4. Một mặt bàn bằng kính có hình dạng như hình 1. Để tạo ra mặt bàn đó người ta dùng một tấm kính hình tam giác đều ABC có cạnh bằng $14(\text{dm})$ và tại mỗi góc trong tam giác cắt tấm kính theo các đường parabol như nhau. Xét tại đỉnh A, parabol có đỉnh M thuộc đường trung tuyến AH, tiếp xúc với hai cạnh AB, AC lần lượt tại N, P sao cho $AM=\sqrt{3}$ dm, $AN=AP=4$ dm (Hình 2).

Hình 1

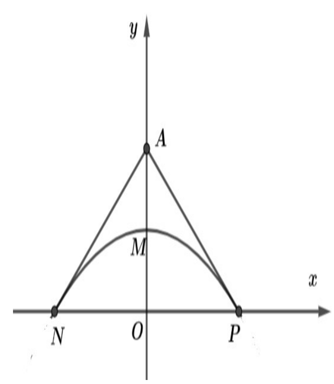


Hình 2

Diện tích mặt bàn thu được là một số có dạng $a\sqrt{b}$ (với $a,b\in\mathbb{N}$ và b không có ước chính phương khác 1). Tính tổng $a+b$.

Lời giải

Đáp số: 48



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Do tam giác ABC đều và $AN=AP=4$ dm nên tam giác ANP đều

$\Rightarrow NP=4$ dm và $OA=4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ dm.

$OM=OA-AM=\sqrt{3}$ dm.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\dfrac{14^2.\sqrt{3}}{4}=49\sqrt{3}\left(\text{dm}^2\right)$.

Ta có: $A\left(0;2\sqrt{3}\right), M\left(0;\sqrt{3}\right), N(-2;0), P(2;0)$.

Phương trình đường thẳng AP là: $\dfrac{x-2}{0-2}=\dfrac{y-0}{2\sqrt{3}-0}\Leftrightarrow y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$.

Giả sử parabol có đỉnh M có dạng $y=ax^2+\sqrt{3},(a\neq 0)$. Parabol đi qua P $\Rightarrow a=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}; y=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+\sqrt{3}$ và hai đường thẳng $x=0; x=2$ là: $S'=\int_0^2\left|\left(-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}\right)-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+\sqrt{3}\right)\right|dx=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích mặt bàn là: $S=S_{ABC}-6.S'=49\sqrt{3}-6.\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=45\sqrt{3}$.

Vậy $a=45, b=3$ và $a+b=48$.

Câu 5. Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t)=\dfrac{a}{b+e^{-0,75t}}$ ($a,b\in\mathbb{R}$), trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Đạo hàm của hàm số $y=P(t)$ biểu thị tốc độ sinh trưởng của nấm men (tính bằng tế bào /giờ) tại thời điểm t (giờ). Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 10 tế bào/giờ. Tìm số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm tốc độ sinh trưởng của quần thể đạt mức tối đa.

Lời giải

Đáp số: 30

Ta có: $P'(t)=\dfrac{-a\left(b+e^{-0,75t}\right)'}{\left(b+e^{-0,75t}\right)^2}=\dfrac{0,75.a.e^{-0,75t}}{\left(b+e^{-0,75t}\right)^2}>0$

Theo bài ra ta có hệ pt : $\begin{cases}P(0)=20\\P'(0)=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{b+e^0}=20\\\dfrac{0,75ae^0}{(b+e^0)^2}=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{b+1}=20(1)\\\dfrac{0,75a}{(b+1)^2}=10(2)\end{cases}$

Từ (1), $b+1=\dfrac{a}{20}$ thay vào (2) $\dfrac{0,75a}{(\frac{a}{20})^2}=10\Leftrightarrow\dfrac{400.0,75}{a}=10\Leftrightarrow a=40.0,75=30$.

$\Rightarrow b=\dfrac{30}{20}-1=0,5\Rightarrow P(t)=\dfrac{30}{0,5+e^{-0,75t}}$.

Tốc độ sinh trưởng của nấm men là lớn nhất khi $v(t)=P'(t)=\dfrac{22,5e^{-0,75t}}{\left(0,5+e^{-0,75t}\right)^2}$ lớn nhất.

$$v'(t)=\frac{-16,875e^{-0,75t}\left(0,5+e^{-0,75t}\right)^2-2.\left(22,5e^{-0,75t}\right).\left(0,5+e^{-0,75t}\right).-0,75e^{-0,75t}}{\left(0,5+e^{-0,75t}\right)^4}$$

$$v'(t)=0\Leftrightarrow\frac{(33,75-16,875)e^{-0,75t}-16,875.0,5}{\left(0,5+e^{-0,75t}\right)^4}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{16,875e^{-0,75t}-16,875.0,5}{\left(0,5+e^{-0,75t}\right)^4}=0\Leftrightarrow t=\frac{\ln 0,5}{-0,75}.$$

Lập BBT hàm $v(t)$ ta được: $v(t)$ lớn nhất khi $t=\dfrac{\ln 0,5}{-0,75}$.

Khi đó số lượng tế bào của quân thể nấm men là $P(t)=\dfrac{30}{0,5+e^{-0,75\frac{\ln 0,5}{-0,75}}}=30$.

Câu 6. Một nhà lắp ráp nhận được các chi tiết do hai nhà máy sản xuất. Trung bình máy thứ nhất cung cấp 65% chi tiết, máy thứ hai cung cấp 35% chi tiết. Khoảng 80% chi tiết do máy thứ nhất sản xuất là đạt tiêu chuẩn, còn 85% chi tiết do máy thứ hai sản xuất là đạt tiêu chuẩn. Lấy ngẫu nhiên từ nhà máy một sản phẩm, thấy nó đạt tiêu chuẩn. Tìm xác suất để sản phẩm đó do nhà máy thứ nhất sản xuất (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Lời giải

Đáp số: 0,64

Gọi A là biến cố:"chọn được sản phẩm của nhà máy thứ nhất", B là biến cố:"Chọn được sản phẩm đạt tiêu chuẩn".

Do trung bình máy thứ nhất cung cấp 65% chi tiết, máy thứ hai cung cấp 35% chi tiết nên: $P(A)=0,65, P(\overline{A})=0,35$.

Do khoảng 80% chi tiết do máy thứ nhất sản xuất là đạt tiêu chuẩn, còn 85% chi tiết do máy thứ hai sản xuất là đạt tiêu chuẩn nên: $P(B|A)=0,8; P(B|\overline{A})=0,85$.

Xác suất để sản phẩm thuộc nhà máy thứ nhất sản xuất với điều kiện đạt tiêu chuẩn là:

$$P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}=\frac{0,65.0,8}{0,65.0,8+0,35.0,85}=\frac{208}{327}\approx 0,64.$$

☙ HẾT ❧

ĐỀ 03 – GIẢI

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là:

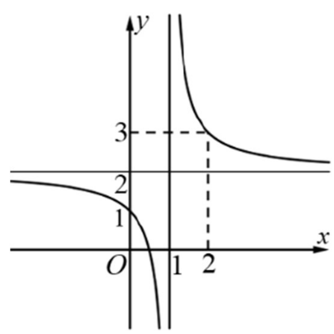
A. $(1;-2;-3)$. **B.** $(1;2;-3)$. **C.** $(1;-2;3)$. **D.** $(1;2;3)$.

Lời giải

Chọn B

Từ phương trình mặt cầu ta suy ra tâm mặt cầu có tọa độ là $(1;2;-3)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (với $c\neq 0, ad-bc\neq 0$) có đồ thị như hình sau:



Đường thẳng nào sau đây là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho?

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $y=1$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=1$.

Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$ và $u_2=8$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. 4. **B.** -6. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_2 = u_1.q \Rightarrow 8 = 2q \Rightarrow q = \dfrac{8}{2} = 4$.

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}\left(x-1\right) > -3$ là:

A. $\left(-\infty;9\right)$. **B.** $\left(1;9\right)$. **C.** $\left(9;+\infty\right)$. **D.** $\left(1;\dfrac{9}{8}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình: $\log_{0,5}\left(x-1\right) > -3$.

Điều kiện: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Ta có: $\log_{0,5}\left(x-1\right) > -3 > -3 \Leftrightarrow x-1 < 0,5^{-3} = 8 \Leftrightarrow x < 9$.

Kết hợp điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(1;9\right)$.

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Giá trị của $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D'}$ bằng

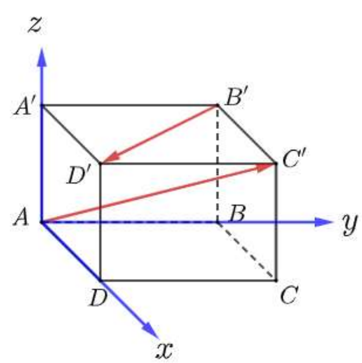
A. 0. **B.** $-\dfrac{1}{2}a^2$. **C.** $\sqrt{6}a^2$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có: $\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp \left(ACC'A'\right) \Rightarrow B'D' \perp AC'$ nên $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D'} = 0$.

Cách 2:



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ (Gốc tọa độ $O \equiv A$).

Ta có tọa độ các điểm $A\left(0;0;0\right)$, $C'\left(a;a;a\right)$, $B'\left(0;a;a\right)$, $D'\left(a;0;a\right)$.

Từ đó có: $\overrightarrow{AC'} = \left(a;a;a\right)$; $\overrightarrow{B'D'} = \left(a;-a;0\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D'} = a.a + a.\left(-a\right) + a.0 = 0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right): x + y - \dfrac{z}{2} = 1$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(P\right)$ là

A. $\vec{n} = \left(1;1;2\right)$. **B.** $\vec{n} = \left(2;2;-1\right)$. **C.** $\vec{n} = \left(1;1;-2\right)$. **D.** $\vec{n} = \left(2;2;1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng $(P): x+y-\frac{z}{2}=1 \Leftrightarrow 2x+2y-z-2=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;2;-1)$.

Câu 7. Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

A. $5^x-1=0$. **B.** $\log_2 x=3$. **C.** $3^x+2=0$. **D.** $\log(x-1)=1$.

Lời giải

Chọn C

➢ Xét phương án A. $5^x-1=0 \Leftrightarrow 5^x=1 \Leftrightarrow x=0$. Phương trình có nghiệm suy ra phương án A sai.

➢ Xét phương án B. $\log_2 x=3 \Leftrightarrow x=2^3=8$. Phương trình có nghiệm suy ra phương án B sai.

➢ Xét phương án C. $3^x+2=0$ vô nghiệm vì $3^x>0 \Rightarrow 3^2+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó phương án C đúng.

➢ Xét phương án D. $\log(x-1)=1 \Leftrightarrow x-1=10^1=10 \Leftrightarrow x=11$. Phương trình có nghiệm do đó phương án D sai.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

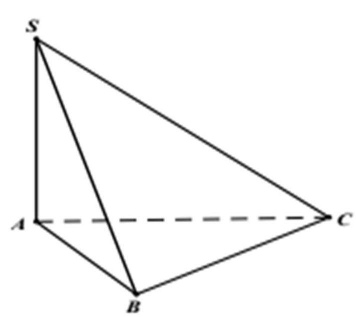
A. $(-\infty;-3)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-3;0)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, $SA\perp(ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là



A. $\widehat{SBA}$. **B.** $\widehat{ASC}$. **C.** $\widehat{SCA}$. **D.** $\widehat{ASB}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $SA\perp(ABC)$ nên $BC\perp SA$.

Ta có BC vuông góc với hai đường thẳng AB và SA nên $BC\perp(SAB)$. Do đó $SB\perp BC$.

Hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng BC.

Do $SB\perp BC$, $SB\subset(SBC)$ và $AB\perp BC$, $AB\subset(ABC)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng SB và AB, đó là góc $\widehat{SBA}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và $f\left(a\right)=-1$, $f\left(b\right)=3$. Khi đó $\int\limits_a^b f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

$\int\limits_a^b f'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(x\right)\Big|_a^b=f\left(b\right)-f\left(a\right)=3-\left(-1\right)=4$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua điểm $M\left(1;-1;3\right)$ và song song với đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{-1}$ có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=3+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+t\\z=3-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=-1+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=3-t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Vì đường thẳng d song song với đường thẳng d_1 nên có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left(2;1;-1\right)$.

Phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=3-t\end{cases}$.

Câu 12. Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục Ox và các đường thẳng $x=a,x=b$ $\left(a<b\right)$ là

A. $S=\pi\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_a^b \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

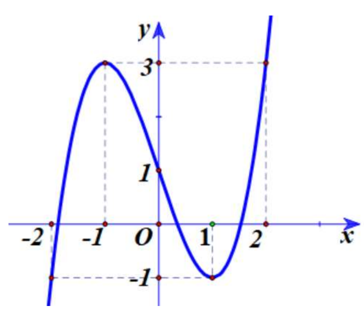
Lời giải

Chọn B

Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, trục Ox và các đường thẳng $x=a,x=b$ $\left(a<b\right)$ được tính bằng công thức: $S=\int\limits_a^b \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



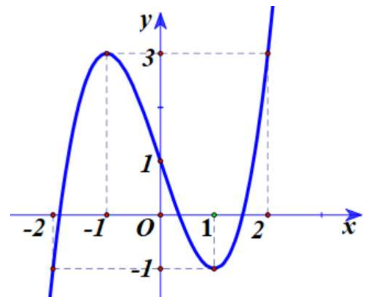
a) **[1]** Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

b) **[2]** Hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị.

c) **[3]** Trên đoạn $\left[-2;2\right]$, hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 2.

d) **[4]** $y=f\left(x\right)=x^3-3x+1$.

Lời giải



a) Đúng.

Dựa vào đồ thị ta có hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

b) Đúng.

Dựa vào đồ thị ta có hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị là $x=-1;x=1$.

c) Sai.

Dựa vào đồ thị ta có hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-2;2\right]$ bằng 3.

d) Đúng.

Giả sử $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow y'=3ax^2+2bx+c$.

Vì đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $\left(0;1\right)$, $\left(2;3\right)$ và có hai điểm cực trị là $x=-1;x=1$ nên ta có:

$$\begin{cases} a.0^3+b.0^2+c.0+d=1 \\ a.2^3+b.2^2+c.2+d=3 \\ 3a.\left(-1\right)^2+2b.\left(-1\right)+c=0 \\ 3a.\left(1\right)^2+2b.\left(1\right)+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \end{cases}.$$

Vậy $y=f\left(x\right)=x^3-3x+1$.

Câu 2. Thống kê điểm đánh giá năng lực của 120 học sinh trong một trường THPT ở địa bàn thành phố Đà Nẵng với thang điểm 100 được cho ở bảng sau:

Điểm	$[0;20)$	$[20;40)$	$[40;60)$	$[60;80)$	$[80;100)$
Số học sinh	25	34	15	38	8

a) **[1]** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 100.
b) **[2]** Số học sinh đạt 60 điểm trở lên là 38 học sinh.
c) **[3]** Điểm trung bình của học sinh đạt được từ bảng số liệu trên là 54 điểm.
d) **[4]** Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ 120 học sinh trên, xác suất chọn được học sinh có điểm thuộc nhóm chứa trung vị là $\frac{1}{8}$.

Lời giải

a) Đúng.
Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là $100-0=100$.

b) Sai.

Số học sinh đạt điểm 60 điểm trở lên là $38+8=46$.

c) Sai.

Điểm trung bình $\overline{x}=\dfrac{25.10+34.30+15.50+38.70+8.90}{25+34+15+38+8}=45$.

d) Đúng.

Cỡ mẫu $n=120$. Suy ra nhóm chứa trung vị là nhóm $[40;60)$.

Xác suất chọn được học sinh có điểm thuộc nhóm chứa trung vị là $\dfrac{15}{120}=\dfrac{1}{8}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$ và điểm $A(2;-5;-6)$.

a) **[1]** Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-3)$.

b) **[2]** Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d có phương trình là $2x+y-3z+17=0$.

c) **[3]** Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên d. Toạ độ của H là $H(3;-1;-4)$.

d) **[4]** Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất, khi đó phương trình mặt phẳng (P) là $x+4y+2z+7=0$.

Lời giải

a) Đúng.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-3)$.

b) Sai.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d.

Suy ra (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-3)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $2(x-2)+(y+5)-3(z+6)=0 \Leftrightarrow 2x+y-3z-17=0$

c) Đúng.

$H\in d \Rightarrow H(1+2t;-2+t;-1-3t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(2t-1;t+3;5-3t)$.

$AH\perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0 \Rightarrow (2t-1).2+(t+3).1-3(5-3t)=0 \Rightarrow 14t-14=0 \Rightarrow t=1$.

Vậy $H(3;-1;-4)$.

d) Sai.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

$AK\perp(P) \Rightarrow AK\perp HK$ nên ΔAHK vuông tại K

$\Rightarrow d(A,(P))=AK\le AH$: hằng số

Để $d(A,(P))$ lớn nhất thì $K\equiv H \Rightarrow K(3;-1;-4)$.

Khi đó (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AK}=(1;4;2)$ và đi qua điểm $K(3;-1;-4)$ nên có phương trình $1.(x-3)+4(y+1)+2(z+4)=0 \Leftrightarrow x+4y+2z+9=0$.

Câu 4. Một người đang lái xe ô tô thì bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đầu xe $25m$, ngay lúc đó người lái xe đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-10t+20(m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t (giây) kể từ lúc đạp phanh.

a) **[1]** Quãng đường $s(t)$ mà xe ô tô đi được trong t (giây) là một nguyên hàm của hàm số $v(t)$.

b) **[2]** $s(t)=-5t^2+20$.

c) **[3]** Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 20 giây.

d) **[4]** Xe ô tô đó không va chạm vào chướng ngại vật trên đường.

Lời giải

a) Đúng

Ta có: $s(t)=\int v(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Sai

Ta có: $s(t)=\int v(t)\,\mathrm{d}t=\int(-10t+20)\,\mathrm{d}t=-5t^2+20t+C$

c) Sai

Khi xe ô tô dừng hẳn tức là $v(t)=0 \Leftrightarrow -10t+20=0 \Leftrightarrow t=2$ (giây)

d) Đúng

Quãng đường kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là:

$s=\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2(-10t+20)\,\mathrm{d}t=20(m)$.

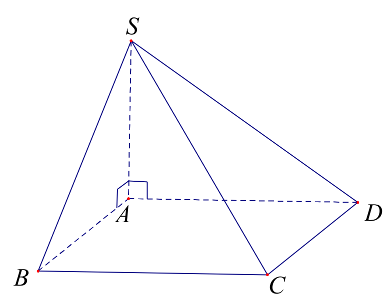
Vì ô tô phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đầu xe $25m$ nên ô tô đó không va chạm vào chướng ngại vật trên đường.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=2$. Tính số đo của góc nhị diện $[S,CD,A]$ (đơn vị: độ).

Lời giải

Đáp số: 45



Ta có $\begin{cases} CD\perp AD \\ CD\perp SA \end{cases}$, mà AD, SA nằm trong (SAD). Suy ra $CD\perp(SAD)$, do đó $CD\perp SD$.

Xét góc nhị diện $[S,CD,A]$, ta có $\begin{cases} SD\perp CD \\ AD\perp CD \end{cases}$, suy ra góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S,CD,A]$ là $\widehat{SDA}$.

Xét $\Delta SAD, \widehat{A}=90^\circ$, ta có $\tan D=\dfrac{SA}{AD}=\dfrac{2}{2}=1$, suy ra $\widehat{D}=45^\circ$. Vậy số đo của góc nhị diện $[S,CD,A]$ là 45°.

Câu 2. Một công ty vận tải đang xem xét việc điều chỉnh lộ trình giao hàng giữa hai thành phố A và B. Biết rằng khoảng cách giữa hai thành phố là 300 km. Trong điều kiện lý tưởng, thời gian vận chuyển dự kiến là 4 giờ. Tuy nhiên, trên thực tế, thời gian vận chuyển phụ thuộc vào vận tốc trung bình v của xe tải (đơn vị: km/h). Gọi $T(v)$ là độ lệch thời gian gian lý tưởng và thực tế, v_1, v_2 lần lượt là vận tốc để $T(v)$ lớn nhất và nhỏ nhất. Biết rằng xe tải được phép chạy vận tốc tối thiểu và tối đa lần lượt là 60 km, 120 km và vận tốc trung bình không thay đổi trong quá trình di chuyển. Tính v_1+v_2 (đơn vị km/h).

Lời giải

Đáp số: 195

Ta mô hình hoá bài toán như sau: Tìm v trong đoạn $[60;120]$ để $T(v)=\left|\frac{300}{v}-4\right|$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Ta có, $T(v)=\left|\frac{300}{v}-4\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{300}{v}-4=0 \Leftrightarrow v_2=75$ km/h .

Mặt khác, $T(60)=1, T(120)=\frac{3}{2}, T(75)=0$. Vậy, $v_1=120$ km/h.

Kết luận: $v_1+v_2=120+75=195$ km/h .

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $P(3;1;0), Q(2;3;0)$ và điểm N di động trên tia Oz. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên OQ và NQ. Đường thẳng EF cắt trục Oz tại điểm T. Khi thể tích khối tứ diện $PQNT$ nhỏ nhất thì phương trình mặt phẳng (PEF) có dạng $ax+by+cz-9=0$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

Lời giải

Đáp số: 2

Đường thẳng OQ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{OQ}=(2;3;0)$ nên có phương trình $\begin{cases} x=2t \\ y=3t \\ z=0 \end{cases}$.

$E \in OQ \Rightarrow E(2t;3t;0)$.

$\overrightarrow{PE}=(2t-3;3t-1;0)$; $\overrightarrow{PE}.\overrightarrow{OQ}=0 \Leftrightarrow t=\frac{9}{13} \Rightarrow E\left(\frac{18}{13};\frac{27}{13};0\right)$.

N di động trên tia $Oz \Rightarrow N(0;0;n)$. $(n>0)$

Đường thẳng NQ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{NQ}=(2;3;-n)$ nên có phương trình $\begin{cases} x=2+2t_1 \\ y=3+3t_1 \\ z=-n.t_1 \end{cases}$.

$\overrightarrow{PF}=(2t_1-1;3t_1+2;-nt_1)$

$\overrightarrow{PF}.\overrightarrow{NQ}=0 \Leftrightarrow 2(2t_1-1)+3(3t_1+2)+n^2t_1=0 \Leftrightarrow t_1=\frac{-4}{13+n^2} \Rightarrow F\left(\frac{18+2n^2}{13+n^2};\frac{27+3n^2}{13+n^2};\frac{4n}{13+n^2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{EF}=\left(\frac{8n^2}{13(13+n^2)};\frac{12n^2}{13(13+n^2)};\frac{4n}{13+n^2}\right)=\frac{4n}{13(13+n^2)}(2n;3n;13)$.

Đường thẳng EF có phương trình $\begin{cases} x=\frac{18}{13}+2nt_2 \\ y=\frac{27}{13}+3nt_2 \\ z=13t_2 \end{cases}$.

Đường thẳng EF cắt trục Oz tại điểm $T \Rightarrow \frac{18}{13}+2nt_2=0 \Leftrightarrow t_2=-\frac{9}{13n} \Rightarrow T\left(0;0;-\frac{9}{n}\right)$.

$\overrightarrow{PQ}=(-1;2;0)$; $\overrightarrow{PN}=(-3;-1;n)$; $\overrightarrow{PT}=\left(-3;-1;-\frac{9}{n}\right)$.

$\left[\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PN}\right]=(2n;n;7)$.

$V_{PQNT}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PN}\right].\overrightarrow{PT}\right|=\frac{7}{6}\left|n+\frac{9}{n}\right|=\frac{7}{6}\left(n+\frac{9}{n}\right)\geq\frac{7}{6}.2\sqrt{n.\frac{9}{n}}=7$ (Vì $n>0$)

Dấu $=$ xảy ra $\Leftrightarrow n=\frac{9}{n}\Leftrightarrow n^2=9\Leftrightarrow n=\pm3\Leftrightarrow n=3$. (Vì $n>0$)

Khi đó $P(3;1;0)$; $E\left(\frac{18}{13};\frac{27}{13};0\right)$; $F\left(\frac{18}{11};\frac{27}{11};\frac{6}{11}\right)$

$\overrightarrow{PE}=\left(-\frac{21}{13};\frac{14}{13};0\right)$; $\overrightarrow{PF}=\left(-\frac{15}{11};\frac{16}{11};\frac{6}{11}\right)$

Hai vectơ chỉ phương của mặt phẳng (PEF) là: $\overrightarrow{u_1}=(-3;2;0),\overrightarrow{u_2}=(-15;16;6)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (PEF) là

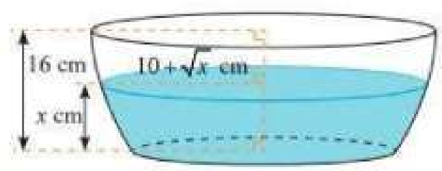
$\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(12;18;-18)=6(2;3;-3)$

Phương trình mặt phẳng (PEF)

$2(x-3)+3(y-1)-3(z-0)=0\Leftrightarrow 2x+3y-3z-9=0$

$\Rightarrow a=2,b=3,c=-3\Rightarrow a+b+c=2$

Câu 4. Nếu cắt chậu nước có hình dạng như hình bên bằng mặt phẳng song song và cách mặt đáy x (cm) $(0\leq x\leq16)$ thì mặt cắt là hình tròn có bán kính $R=10+\sqrt{x}$ (cm). Tìm x (đơn vị cm, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) để thể tích nước trong chậu bằng $\frac{1}{2}$ dung tích của chậu?



Lời giải

Đáp số: 8,94

Thể tích của chậu được tính như sau:

$$V=\int_0^{16}\pi\left(10+\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^{16}\pi\left(100+20\sqrt{x}+x\right)\mathrm{d}x=\pi\left(100x+\frac{40}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{16}=\frac{7744\pi}{3}.$$

Vì dung tích nước trong chậu bằng $\frac{1}{2}$ thể tích của chậu nên :

$$V'=\int_0^{x}\pi\left(10+\sqrt{t}\right)^2\mathrm{d}t=\int_0^{x}\pi\left(100+20\sqrt{t}+t\right)\mathrm{d}t=\pi\left(100t+\frac{40}{3}t\sqrt{t}+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^{x}=\pi\left(100x+\frac{40}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{7744\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 100x+\frac{40}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}-\frac{7744}{6}=0.$$

Đặt $y=\sqrt{x}>0 \Rightarrow \frac{y^4}{2}+\frac{40}{3}y^3+100y^2-\frac{7744}{6}=0 \Rightarrow y\approx 2,99028 \Rightarrow x\approx 8,94$.

Câu 5. Một bệnh viện có hai phòng khám là phòng A và phòng B với khả năng lựa chọn của bệnh nhân là như nhau. Tỉ lệ bệnh nhân nam có ở phòng A và phòng B lần lượt là 60% và 40%. Một người bệnh được chọn ngẫu nhiên từ hai phòng khám và biết người này là nam, tính xác suất để người bệnh được chọn đến từ phòng A.

Lời giải

Đáp số: 0,6

Gọi A là biến cố: "Người bệnh được chọn từ phòng A".

$\overline{A}$ là biến cố: "Người bệnh được chọn từ phòng B".

Do khả năng lựa chọn phòng khám của bệnh nhân là như nhau nên $P(A)=P(\overline{A})=0,5$.

Gọi N là biến cố: "Người bệnh được chọn là nam".

Do tỉ lệ bệnh nhân nam có ở phòng A là 60% nên xác suất người bệnh được chọn là nam, biết người đó đến từ phòng A là $P(N|A)=60\%=0,6$.

Do tỉ lệ bệnh nhân nam có ở phòng B là 40% nên xác suất người bệnh được chọn là nam, biết người đó đến từ phòng B là $P(N|\overline{A})=40\%=0,4$.

Khi đó, xác suất người bệnh được chọn đến từ phòng A, biết người đó là nam là $P(A|N)$.

$$P(A|N)=\frac{P(A).P(N|A)}{P(A).P(N|A)+P(\overline{A}).P(N|\overline{A})}=\frac{0,5.0,6}{0,5.0,6+0,5.0,4}=0,6.$$

Câu 6. Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t)=1000\left(t^2+me^{-t}\right)$ với $t\geq 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, m là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Tính tổng các giá trị nguyên âm của m biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm.

Lời giải

Đáp số: -3

Ta có $f'(t)=1000\left(2t-me^{-t}\right), f''(t)=1000\left(2+me^{-t}\right)$.

Tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm khi và chỉ khi hàm số $f'(t)$ đồng biến trên $[0;10]$ $\Leftrightarrow f''(t)\geq 0\ \forall t\in[0;10]$.

$\Leftrightarrow 2+me^{-t}\geq 0\ \forall t\in[0;10] \Leftrightarrow m\geq -2e^t\ \ \forall t\in[0;10]\ \ (1)$

Xét hàm $g(t)=-2e^t$ luôn nghịch biến trên $[0;10] \Rightarrow \max\limits_{[0;10]} g(t)=g(0)=-2$

Do đó $(1)\Leftrightarrow m\geq -2$.

Suy ra tổng các giá trị nguyên âm của m bằng -3.

ĐỀ 04 – GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (3,0 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=4x^3+e^x-1$ là

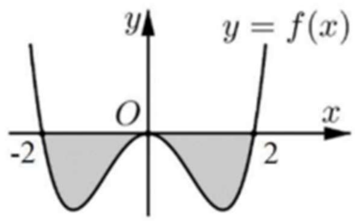
A. x^4+e^x-x+C. **B.** $\frac{1}{4}x^4+e^x-x+C$. **C.** $4x^4+e^x-x+C$. **D.** x^4+e^x+C.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int\left(4x^3+e^x-1\right)dx=x^4+e^x-x+C$.

Câu 2. Hình vẽ bên dưới biểu diễn trục hoành cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại ba điểm có hoành độ $-2;0;2$. Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f\left(x\right)$ và trục hoành. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. $S=\int_{-2}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=-\int_{-2}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-2}^{2}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$. **D.** $S=\left|\int_{-2}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$S=\int_{-2}^{2}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-2}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|=-\int_{-2}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

Câu 3. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có số hạng đầu $u_1=2$ và công bội $q=3$. Tổng 5 số hạng đầu của cấp số nhân đã cho bằng

A. 486. **B.** 162. **C.** 81. **D.** 242.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S_5=u_1.\frac{q^5-1}{q-1}=242$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A\left(1;2;-1\right)$ và vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right):x-3y+2z-5=0$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=2-3t\\z=1+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-3+2t\\z=2-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2-3t\\z=-1+2t\end{cases}$.

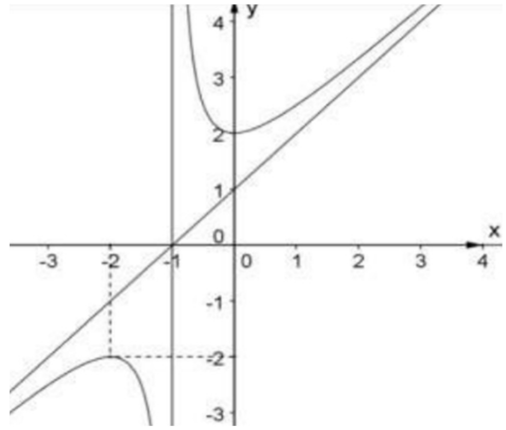
Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d đi qua điểm $A\left(1;2;-1\right)$ và vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right):x-3y+2z-5=0$ nhận vectơ $\vec{u}=\left(1;-3;2\right)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số là:

$$d:\begin{cases}x=1+t\\y=2-3t\\z=-1+2t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right).$$

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ (với $a\neq 0, m\neq 0$ và $-\dfrac{n}{m}$ không là nghiệm của $ax^2+bx+c=0$) có đồ thị như hình vẽ. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng



A. $y=-4$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $y=4$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào hình vẽ, ta thấy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=-1$.

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x<\log_2\left(12-3x\right)$ là

A. $\left(3;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;3\right)$. **C.** $\left(0;6\right)$. **D.** $\left(0;3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 12-3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 4>x \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<4$.

Ta có: $\log_2 x<\log_2\left(12-3x\right)\Leftrightarrow x<12-3x\Leftrightarrow 4x<12\Leftrightarrow x<3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x<\log_2\left(12-3x\right)$ là $\left(0;3\right)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. Hỏi trong các vectơ sau, đâu không phải là vectơ chỉ phương của d?

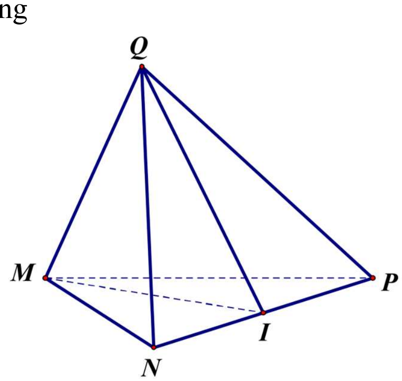
A. $\overrightarrow{u_1}=\left(-1;2;3\right)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=\left(3;-6;-9\right)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=\left(1;-2;-3\right)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=\left(-2;4;3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left(-1;2;3\right)=-\dfrac{1}{3}\left(3;-6;-9\right)=-\left(1;-2;-3\right)$.

Câu 8. Cho tứ diện $MNPQ$ có hai tam giác MNP và QNP là hai tam giác cân lần lượt tại M và Q (tham khảo hình vẽ dưới đây). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng NP. Góc giữa hai đường thẳng MQ và NP bằng



A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: ΔMNP là tam giác cân tại M, có I là trung điểm của đoạn thẳng NP suy ra MI vừa là trung tuyến vừa là đường cao của $\Delta MNP\Rightarrow MI\perp NP$.

Tương tự: ΔQNP là tam giác cân tại Q, có I là trung điểm của đoạn thẳng NP suy ra QI vừa là trung tuyến vừa là đường cao của $\Delta QNP\Rightarrow QI\perp NP$.

Có: $\begin{cases} MI\perp NP \\ QI\perp NP \end{cases}\Rightarrow NP\perp\left(MQI\right)\Rightarrow NP\perp MQ$.

Suy ra góc giữa hai đường thẳng MQ và NP bằng $90°$.

Câu 9. Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$

A. $x=10$. **B.** $x=9$. **C.** $x=3$. **D.** $x=4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3^{x-1}=27 \Rightarrow 3^{x-1}=3^3 \Rightarrow x-1=3 \Rightarrow x=4$.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=4$ và $d=8$. Số hạng u_{20} của cấp số cộng đã cho bằng

A. 156. **B.** 165. **C.** 12. **D.** 245.

Lời giải

Chọn A

Công thức tổng quát của cấp số cộng là $u_n=4+(n-1).8 \Rightarrow u_{20}=4+19.8=156$.

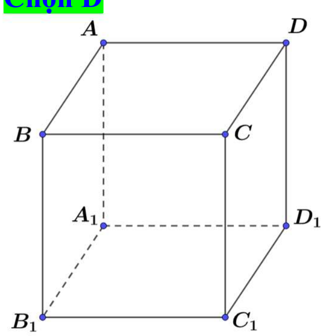
Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$. **B.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$. **D.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn D



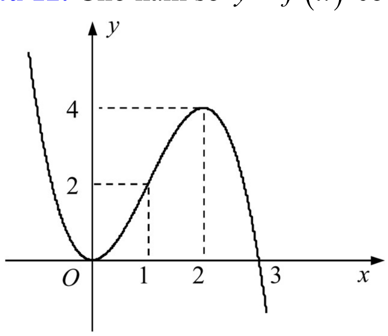
+) Xét phương án A. Theo tính chất cộng hình bình hành $\begin{cases}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}\\ \overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{B_1D_1}\end{cases}$, mà $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B_1D_1}$ nên suy ra $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$. Suy ra phương án A đúng.

+) Xét phương án B. Theo tính chất hình lập phương, ta có $\overrightarrow{D_1A_1}=-\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{DC}$, thay vào vế trái ta được $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$. Suy ra phương án B đúng.

+) Xét phương án C. Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$. Suy ra phương án C đúng.

+) Xét phương án D. Ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BD_1}\neq\overrightarrow{BC}$. Suy ra phương án D sai.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;4)$.

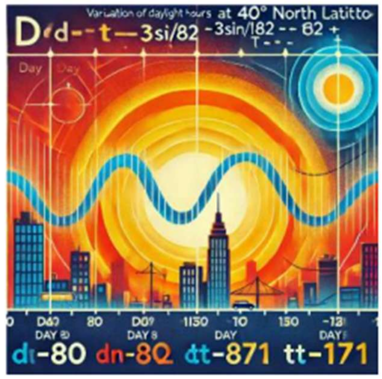
Lời giải

Chọn C

Quan sát đồ thị $y=f(x)$ ta thấy đồ thị đi lên trong khoảng $(0;2)$, suy ra hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(0;2)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai (4,0 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Số giờ có ánh sáng mặt trời của thành phố A ở vĩ độ $40°$ Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số: $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12$ với $t \in \mathbb{N}$ và $0 < t \leq 365$.



a) [1] Ngày thứ 80 trong năm có đúng 10 giờ có ánh sáng mặt trời.

b) [2] Đạo hàm của hàm số đã cho là $d'(t) = \frac{3\pi}{182}\cos\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]$.

c) [3] Nghiệm của phương trình $d'(t) = 0$ trên đoạn $[1;171]$ là $t = 171$.

d) [4] Ngày thứ 160 có số giờ sáng lớn nhất trong năm.

Lời giải

a) Số giờ có ánh sáng của ngày thứ 80 trong năm là $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 = 12$

Chọn SAI.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $d'(t) = \frac{3\pi}{182}\cos\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]$.

Chọn ĐÚNG.

c) Ta có $d'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{182}\cos\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 0$.

$\cos\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

$\Leftrightarrow t - 80 = 91 + 182k \Leftrightarrow \xrightarrow{[1;171]} t = 171$

Chọn ĐÚNG.

d) $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] \leq 1 \Leftrightarrow 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \leq 15$.

Suy ra

$Max d(t) = 15 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

$\Leftrightarrow t = 171 + 364k \xrightarrow{[0;365]} t = 171$

Chọn SAI.

Câu 2. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch.Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị:nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu (A) và (B) trong 50 ngày giao dịch liên tiếp

Giá đóng cửa	$[18;20)$	$[20;22)$	$[22;24)$	$[24;26)$	$[26;28)$
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

Giá đóng cửa	$[18;20)$	$[20;22)$	$[22;24)$	$[24;26)$	$[26;28)$
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

a) **[1]** Xét mẫu số liệu của cổ phiếu (A) ta có số trung bình là $\overline{x_A} = 23{,}28$.

b) **[2]** Xét mẫu số liệu của cổ phiếu (A) ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là $s^2{}_A = 7{,}5216$

c) **[3]** Xét mẫu số liệu của cổ phiếu (B) ta có số trung bình là $\overline{x_B} = 23{,}48$.

d) **[4]** Cổ phiếu (A) có mức biến động giá lớn hơn cổ phiếu (B).

Lời giải

a) Đúng

Xét mẫu số liệu của cổ phiếu (A) ta có số trung bình là $\overline{x_A} = \dfrac{19.8+21.9+23.12+25.10+27.11}{8+9+12+10+11} = 23{,}28$.

b) Đúng

Xét mẫu số liệu của cổ phiếu (A) ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s^2{}_A = \frac{8.(19-23,28)^2+9.(21-23,28)^2+12.(23-23,28)^2+10.(25-23,28)^2+11(27-23,28)^2}{8+9+12+10+11}$$

$\Rightarrow s^2{}_A = 7{,}5216$

c) Đúng

Xét mẫu số liệu của cổ phiếu (B) ta có số trung bình là $\overline{x_B} = \dfrac{19.16+21.4+23.3+25.6+27.21}{16+4+3+6+21} = 23{,}48$.

d) Sai

Xét mẫu số liệu của cổ phiếu (B) ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s^2{}_B = \frac{16.(19-23,48)^2+4.(21-23,48)^2+3.(23-23,48)^2+6.(25-23,48)^2+21.(27-23,48)^2}{16+4+3+6+21}$$

$\Rightarrow s^2{}_B = 12{,}4096$

Ta thấy $s^2{}_B > s^2{}_A$ nên cổ phiếu (B) biến động giá lớn hơn cổ phiếu (A).

Câu 3. Một người điều khiển ôtô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn $250m$, tốc độ của ô tô là $36\,km/h$. Năm giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b\,(m/s)$ $(a,b \in \mathbb{R}, a > 0)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 20 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) **[1]** Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là $200\,m$.

b) **[2]** Giá trị của b là 10.

c) **[3]** Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây $(0 \le t \le 20)$ kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức $S(t) = \int\limits_0^{20} v(t)\,\mathrm{d}t$.

d) **[4]** Sau 20 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt qua tốc độ tối đa cho phép là $100\,km/h$.

Lời giải

a) Đúng.

Tốc độ ban đầu của ô tô là: $36\,km/h = 10\,m/s$.

Quãng đường ô tô di chuyển trong 5 giây đầu tiên là: $S_1 = 5.10 = 50(m)$.

Quãng đường ô tô đi được kể từ khi bắt đầu tăng tốc đến lúc nhập làn là: $S_2 = 250 - S_1 = 250 - 50 = 200(m)$.

b) Đúng.

Thời điểm bắt đầu tăng tốc thì vận tốc của xe ô tô là $10\,m/s$ do đó $a.0 + b = 10 \Leftrightarrow b = 10$.

c) Sai.

Quãng đường $S(t)$ mà ô tô đi được trong thời gian t giây $(0 \le t \le 20)$ kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức $S(t)=\int\limits_0^t v(t)\mathrm{d}t$.

d) Sai.

Biết xe nhập làn sau 12 giây kể từ khi tăng tốc nên ta có:

$$\int\limits_0^{12}(at+10)\mathrm{d}t=200 \Leftrightarrow \left(\frac{at^2}{2}+10t\right)\Bigg|_0^{12}=200 \Leftrightarrow a.72+10.12=200 \Leftrightarrow a=\frac{10}{9}.$$

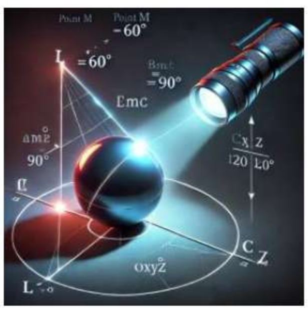
Khi đó $v(t)=\frac{10}{9}t+10\ (m/s)$.

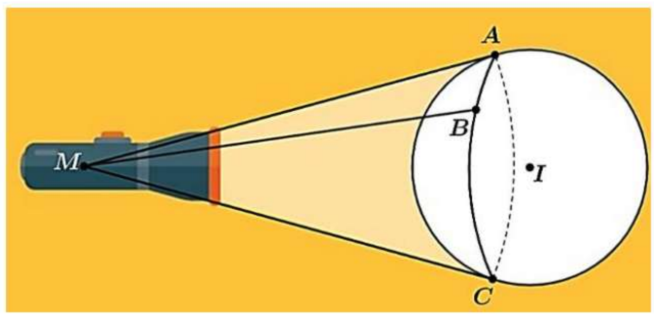
Tốc độ của xe sau 20 giây kể từ khi tăng tốc là:

$$v(20)=\frac{10}{9}.20+10=\frac{290}{9}(m/s)=116(km/h)>100(km/h).$$

Sau 20 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô vượt tốc độ tối đa cho phép là $100\,km/h$.

Câu 4. Nguồn sáng phát ra từ một cây đèn pin khi chiếu vào một quả cầu phản quang sẽ cho ta hình ảnh của một mặt cầu tiếp xúc với các đường sinh của một hình nón (xem hình vẽ). giả sử nguồn sáng phát ra từ điểm M, trong một hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho sẵn với đơn vị trên mỗi trục là mét, các tiếp tuyến MA, MB, MC thoả mãn $AMB=60^0$, $BMC=90^0, CMA=120^0$. Mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$





a) [1] Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R=3\sqrt{3}$.

b) [2] Nếu đặt $MA=MB=MC=x>0$ thì $AB=x, BC=x\sqrt{3}, AC=x\sqrt{2}$

c) [3] Tam giác ABC cân.

d) [4] Độ dài bé nhất của OM là $2,26$ (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Đúng.

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=27 \Rightarrow I(1;2;-3), R=3\sqrt{3}$$

b) Sai.

Tam giác MAB đều nên $MA=x$

Tam giác MBC vuông cân tại M nên $BC=x\sqrt{2}$.

Tam giác MAC có $AC^2=MA^2+MC^2-2.MA.MC.\cos 120^0 \Rightarrow AC=x\sqrt{3}$

c) Sai.

Ta có $AB^2+BC^2=3x^2=AC^2 \Rightarrow ABC$ vuông tại B.

d) Đúng.

Gọi K là trung điểm của AC ta có 3 điểm M, K, I thẳng hàng.

Xét tam giác MAI vuông tại A ta có $MI=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 60^0}=6;\ OI=\sqrt{14}<MI$

Ta có $MO+OI \ge MI \Rightarrow MO \ge MI-OI=6-\sqrt{14}\approx 2,26$.

Đẳng thức xảy ra khi M, O, I thẳng hàng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn (3,0 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một xe ôtô chở khách du lịch có sức chứa tối đa 45 hành khách. Trong khu du lịch Mỹ Sơn, một đoàn khách gồm 60 người đang đi bộ và muốn thuê xe về khách sạn. Người lái xe đưa ra thỏa thuận với đoàn khách du lịch như sau: Nếu một chuyến xe chở x (người) thì giá tiền cho mỗi người là $\dfrac{(100-x)^2}{40}$ (nghìn đồng) và một chuyến không chở dưới 21 người. Hỏi với thỏa thuận như trên thì cần trả ít nhất bao nhiêu nghìn đồng để cả đoàn được đưa về khách sạn bằng xe du lịch? (làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Đáp số: 6905

Vì đoàn khách có 60 người, xe có sức chứa tối đa 45 hành khách nên đoàn khách phải chia ra di chuyển nhiều hơn 1 lượt.

Tuy nhiên, mỗi lần chở không dưới 21 người nên đoàn khách không thể chia thành 3 lượt đi trở lên.

Như vậy đoàn khách phải chia ra di chuyển thành 2 chuyến.

Gọi x (người) là lượng khách lần đầu tiên di chuyển về khách sạn $\left(x \in \mathbb{N}^*, 21 \le x \le 45\right)$.

$\Rightarrow$ Lượng khách đợt thứ hai là: $60-x$ (người).

Theo thỏa thuận: $60-x \ge 21 \Leftrightarrow x \le 39$.

Như vậy điều kiện của x là: $x \in \mathbb{N}^*, 21 \le x \le 39$

Chi phí cho lượt di chuyển đầu tiên là: $C_1 = \dfrac{(100-x)^2}{40}.x = \dfrac{1}{40}\left(x^3 - 200x^2 + 10000x\right)$.

Chi phí cho lượt di chuyển thứ hai là:

$C_2 = \dfrac{\left[100-(60-x)\right]^2}{40}.(60-x) = \dfrac{1}{40}\left(x^2+80x+1600\right)(60-x)$

$= \dfrac{1}{40}\left(-x^3 - 20x^2 + 3200x + 96000\right)$.

Tổng chi phí cho việc di chuyển của đoàn khách về khách sạn là:

$C(x) = C_1 + C_2 = \dfrac{1}{40}\left(-220x^2 + 13200x + 96000\right)$ (nghìn đồng).

$C'(x) = \dfrac{1}{40}(-440x + 13200) = 0 \Leftrightarrow x = 30$

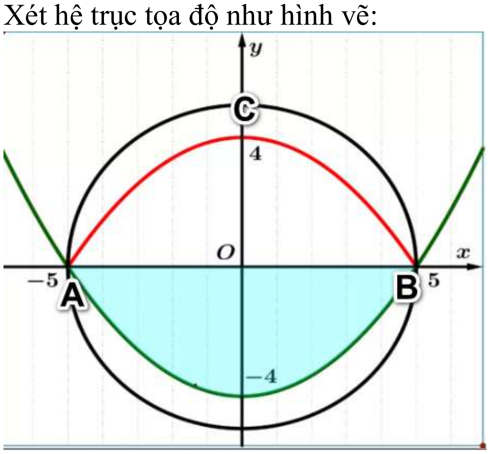
So sánh $C(30), C(21), C(39)$ ta được: chi phí thấp nhất để đoàn khách di chuyển về khách sạn như theo thỏa thuận là $C(21) = C(39) = 6904,5 \approx 6905$ (nghìn đồng)

Câu 2. Khu vực trung tâm một quảng trường có dạng hình tròn đường kính AB bằng 10m. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường parabol đối xứng nhau qua AB, nằm trong hình tròn, đi qua các điểm A, B và có đỉnh cách mép hình tròn 1m. Phần giới hạn bởi 2 parabol được trồng hoa với chi phí 200 nghìn đồng 1 mét vuông, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 800 nghìn đồng 1 mét vuông. Tính tổng chi phí để hoàn thành khu vực này (đơn vị: triệu đồng, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp số: 30,8.

Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có $A(-5;0), B(5;0), C(0;4)$.

Giả sử phương trình của parabol đi qua 3 điểm A, B, C có dạng $y = ax^2 + bx + c \ (a < 0)$.

Ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} a(-5)^2 + b(-5) + c = 0 \\ a.5^2 + b.5 + c = 0 \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{4}{25} \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$.

Parabol hướng bề lõm xuống dưới có dạng $y = -\dfrac{4}{25}x^2 + 4$.

Diện tích phần trồng hoa là $S_1 = 2\int_{-5}^{5}\left(-\dfrac{4}{25}x^2 + 4\right)\mathrm{d}x = \dfrac{160}{3}\ (m^2)$

Diện tích quảng trường là $25\pi\ (m^2)$.

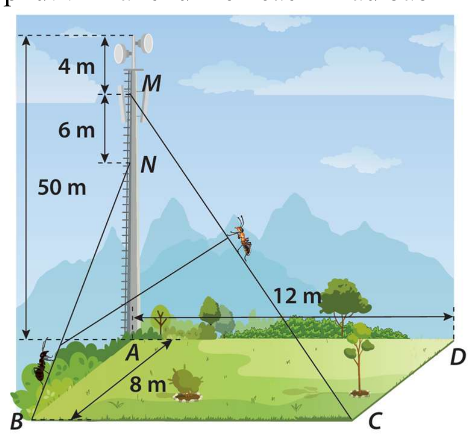
Diện tích phần lát gốm là $25\pi - \dfrac{160}{3}\ (m^2)$.

Tổng chi phí để làm khu vực trung tâm quảng trường là

$\dfrac{160}{3}.200 + \left(25\pi - \dfrac{160}{3}\right).800 \approx 30,8$ (triệu đồng)

Vậy tổng chi phí để hoàn thành khu vực này là $30,8$ triệu đồng.

Câu 3. Một tháp phát sóng cao 50 m đặt ở góc A của sân hình chữ nhật ABCD. Để giữ cho tháp không bị đổ, người ta có cột rất nhiều dây cáp quanh tháp và cố định tại các vị trí trên mặt đất. Hai chú kiến vàng và kiến đen bắt đầu leo lên hai dây cáp CM và BN (từ C và B) với vận tốc lần lượt là 3 m/phút và 2,5 m/phút. Hỏi sau 10 phút thì hai chú kiến cách nhau bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Lời giải

Đáp số: 6,12

Lắp trục Ox trùng tia AB, trục Oy trùng tia AD và trục Oz trùng tia AM.

Khi đó ta có: $B(8;0;0)$, $C(8;12;0)$, $N(0;0;40)$, $M(0;0;46)$.

Gọi P, Q lần lượt là vị trí của chú kiến đen và chú kiến vàng sau 10 phút.

Cần tính độ dài đoạn PQ.

Ta có: $BP = 2,5.10 = 25m; CQ = 3.10 = 30m$.

$\overrightarrow{BN} = (-8;0;40) \Rightarrow BN = 8\sqrt{26} = b$.

$\overrightarrow{CM} = (-8;-12;46) \Rightarrow CP = 2\sqrt{581} = c$.

Khi đó: $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BN}} = \dfrac{25}{b} \Rightarrow P = B + \dfrac{25}{b}.(N - B) = \left(8 - \dfrac{200}{b};0;\dfrac{1000}{b}\right)$

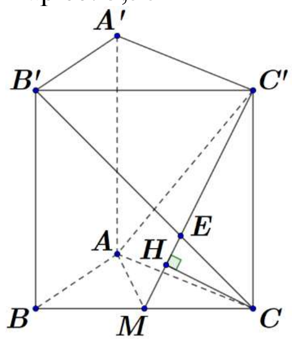
$\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{CM}} = \dfrac{30}{c} \Rightarrow Q = C + \dfrac{30}{c}.(M - C) = \left(8 - \dfrac{240}{c};12 - \dfrac{360}{c};\dfrac{1380}{c}\right)$.

Suy ra $PQ=\sqrt{\left(\frac{200}{b}-\frac{240}{c}\right)^2+\left(12-\frac{360}{c}\right)^2+\left(\frac{1000}{b}-\frac{1380}{c}\right)^2}\approx 6,12$.

Câu 4. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh có độ dài bằng 4. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(C'AM)$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp số: 3,58



Gọi E là giao điểm của MC' và $B'C$.

Do BC song song với $B'C'$ nên $\frac{EC}{EB'}=\frac{MC}{B'C'}=\frac{MC}{BC}=\frac{1}{2}$.

Ta có: $\frac{d\left(C,(C'AM)\right)}{d\left(B',(C'AM)\right)}=\frac{EC}{EB'}=\frac{1}{2}\Rightarrow d\left(B',(C'AM)\right)=2d\left(C,(C'AM)\right)$.

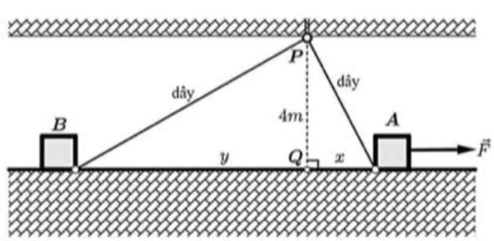
Ta có: $\begin{cases}AM\perp BC\\AM\perp BB'\end{cases}\Rightarrow AM\perp(BB'C'C)\Rightarrow(C'AM)\perp(BB'C'C)$.

Ta có: $\begin{cases}(C'AM)\perp(BB'C'C)\\(C'AM)\cap(BB'C'C)=MC'\\CH\perp MC', CH\subset(BB'C'C)\end{cases}\Rightarrow CH\perp(C'AM)\Rightarrow d\left(C,(C'AM)\right)=CH$.

Xét tam giác MCC' vuông tại C, đường cao CH:

Ta có: $\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{CM^2}+\frac{1}{CC'^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{5}{16}\Rightarrow CH=\frac{4\sqrt{5}}{5}\Rightarrow d\left(B',(C'AM)\right)=\frac{8\sqrt{5}}{5}\approx 3,58$.

Câu 5. Có hai thùng hàng A và B được đặt trên sàn nhà kho. Hai thùng được nối với nhau bằng một sợi dây dài $15m$, sợi dây luôn căng và được kéo qua một ròng rọc gắn tại điểm P trên trần nhà. Biết trần nhà cao $4m$ so với mặt sản (đoạn $PQ=4m$) và trong quá trình di chuyển, hai thùng hàng luôn nằm trên mặt sản (bỏ qua lực ma sát).



Nếu thùng A cách Q khoảng $3m$ và đang được kéo ra xa ở với tốc độ không đổi $0,5m/s$, hỏi thùng ở B đang di chuyển về phía Q với tốc độ bao nhiêu m/s (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp số: 0,33

Giả sử tại thời điểm ban đầu A trùng với Q, B nằm tại vị trí B_0 và $t=0$ (s).

Quãng đường A đi được sau t giây: $AQ=x=0,5t$ (m).

Khi đó: $PA=\sqrt{x^2+4^2}=\sqrt{0,25t^2+16}$ (m) và $PB=15-PA=15-\sqrt{0,25t^2+16}$ (m).

$y=BQ=\sqrt{BP^2-4^2}=\sqrt{\left(15-\sqrt{0,25t^2+16}\right)^2-16}$ (m).

Quãng đường B đi được sau t giây:

$$B_0B = B_0Q - y = B_0Q - \sqrt{\left(15-\sqrt{0,25t^2+16}\right)^2 - 16} = f(t) \text{ (m).}$$

Khi $AQ = 3$, ta được $t = 6$ (s).

Vậy tốc độ thùng hàng B tại thời điểm $t = 6$ (s) là: $f'(6) \approx 0,33$ (m/s).

Câu 6. Trong kì thi Tốt nghiệp trung học phổ thông năm 2024, một trường X có 60% học sinh lựa chọn tổ hợp $D00$ (gồm các môn Toán, Văn, Ngoại ngữ). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp $D00$ thì xác suất để học sinh đó đỗ Đại học là $0,7$; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp $D00$ thì xác suất để học sinh đó đỗ Đại học là $0,5$. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường X đã Tốt nghiệp trung học phổ thông năm 2024. Biết rằng học sinh này đã đỗ Đại học. Tính xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp $D00$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp số: 0,68

Gọi A là biến cố: "Học sinh đó chọn tổ hợp $D00$ "; B là biến cố: "Học sinh đó đỗ Đại học".

Ta cần tính $P(A|B)$. Theo công thức Bayes, ta cần biết:

$P(A), P(\overline{A}), P(B|A)$ và $P(B|\overline{A})$. Ta có:

$P(A) = 0,6; P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$.

$P(B|A)$ là xác suất để một học sinh đỗ đại học với điều kiện học sinh đó chọn tổ hợp $D00$ $\Rightarrow P(B|A) = 0,7$

$P(B|\overline{A})$ là xác suất để một học sinh đỗ đại học với điều kiện học sinh đó không chọn tổ hợp $D00$ là $P(B|\overline{A}) = 0,5$

Thay vào công thức Bayes ta được:

$$P(A|B) = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A) + P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})} = \frac{0,6\cdot 0,7}{0,6\cdot 0,7 + 0,4\cdot 0,5} \approx 0,68.$$

☙ HẾT ❧

ĐỀ 05 – GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (3,0 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Nghiệm của phương trình $\log_2(1-x) = 3$ là:

A. 7. **B.** -7. **C.** -5. **D.** -9.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(1-x) = 3 \Leftrightarrow 1 - x = 8 \Leftrightarrow x = -7$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\left(a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \neq 0\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(-5;+\infty)$. **D.** $(0;4)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 3. Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1; x=4$. Diện tích của hình phẳng (H) là:

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** $\frac{14\pi}{3}$. **C.** $\frac{15}{2}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Lời giải

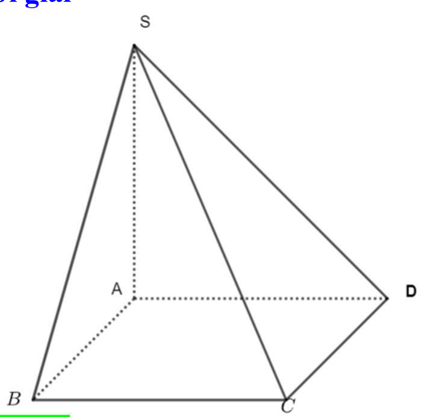
Chọn D

Diện tích hình phẳng (H) là $S=\int_1^4 \sqrt{x}dx=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\frac{14}{3}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA\perp(ABCD)$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $AB\perp(SAC)$. **B.** $(SBD)\perp(SAC)$ **C.** $(ABCD)\perp(SAC)$. **D.** $BD\perp(SAC)$.

Lời giải



Chọn A

Vì AB không vuông góc với AC nên AB không vuông góc với (SAC), do đó đáp án A sai.

Ta có $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SA \end{cases} \Rightarrow BD\perp(SAC)$

Do đó ta có $(SBD)\perp(SAC)$, $(ABCD)\perp(SAC)$, $BD\perp(SAC)$. Nên các đáp án B,C, D đúng.

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$ và công bội $q=-2$. Giá trị u_4 là:

A. 48. **B.** 24. **C.** -24. **D.** -3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_n=u_1.q^{n-1}\Rightarrow u_4=u_1q^3=3.(-2)^3=-24$ .4

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $5.2^{x+1}>3^x$ là:

A. $\left(-\infty;\log_{\frac{3}{2}}10\right)$. **B.** $\left(\log_{\frac{3}{2}}10;+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\log_{\frac{3}{2}}10\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $5.2^{x+1}>3^x\Leftrightarrow 10.2^x>3^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x<10\Leftrightarrow x<\log_{\frac{3}{2}}10$

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{x+1}-\sin x$ là:

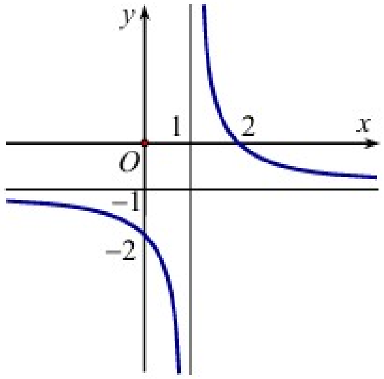
A. $\frac{3^{x+1}}{\ln 3}-\cos x+C$ **B.** $\frac{3^{x+1}}{\ln 3}+\cos x+C$

C. $\frac{3^{x+1}}{\ln(x+1)}+\cos x+C$ **D.** $3^{x+1}+\cos x+C$

Lời giải

Chọn B

Câu 8. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ \left(c\neq 0, ad-bc\neq 0\right)$ có đồ thị như hình dưới:



Giá trị của $\dfrac{a}{c}-\dfrac{d}{c}$ bằng

A. -1 **B.** -2 **C.** 1 **D.** 0

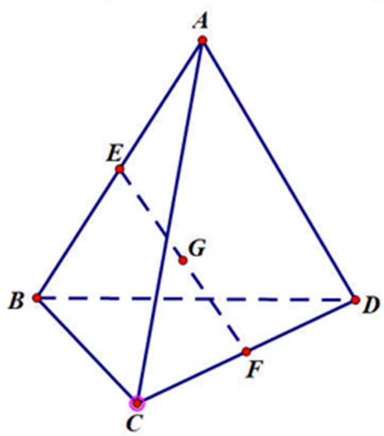
Lời giải

Chọn D

Tiệm cận đứng $-\dfrac{d}{c}=1\Rightarrow\dfrac{d}{c}=-1$.

Tiệm cận ngang $\dfrac{a}{c}=-1$. Suy ra $\dfrac{a}{c}-\dfrac{d}{c}=-1-(-1)=0$.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của cạnh AB và cạnh CD. Gọi G là trung điểm của đoạn EF. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$ **B.** $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$ **D.** $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{EF}\Leftrightarrow\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{EF}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{EF}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;5;0)$ và $\vec{n}=(0;1;-2)$. Mặt phẳng qua A và nhận $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến có phương trình là:

A. $-3x+5y-5=0$ **B.** $y-2z-5=0$ **C.** $-3x+5y+5=0$ **D.** $y-2z+5=0$

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt phẳng là: $0(x+3)+1(y-5)-2(z-0)=0\Leftrightarrow y-2z-5=0$.

Câu 11. Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 12 khách hàng mua sách ở một cửa hàng trong một ngày.

Giá tiền	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$
Số lượng khách mua	2	6	4

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

A. $\frac{55}{3}$ **B.** $\frac{65}{6}$ **C.** $\frac{312}{5}$ **D.** $\frac{12}{5}$

Lời giải

Chọn B

$Q_1 = 50 + \frac{3-2}{6}.10 = \frac{155}{3}$.

$Q_3 = 60 + \frac{3.3-(2+6)}{4}.10 = \frac{125}{2}$.

Khoảng tứ phân vị $\Delta Q = Q_3 - Q_1 = \frac{65}{6}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là:

A. $\vec{u} = (-4;2;-6)$ **B.** $\vec{u} = (6;-3;6)$

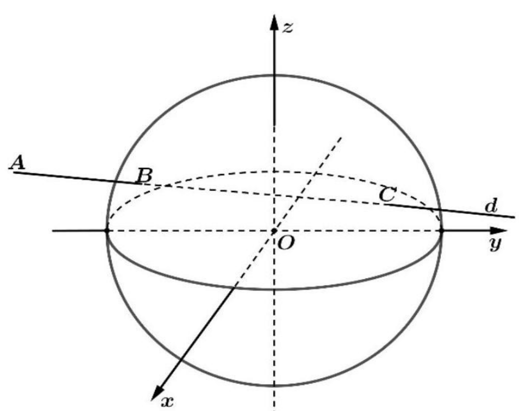
C. $\vec{u} = (0;1;-2)$ **D.** $\vec{u} = (2;1;3)$

Lời giải

Chọn A

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai (4,0 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600(\text{km})$. Một máy bay A đang chuyển động với vận tốc $900(\text{km/h})$ trên đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -300 + 80t \\ z = 100\sqrt{11} \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ qua vùng kiểm soát của đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



a) [1] Ranh giới giữa bên ngoài và vùng kiểm soát của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng $300\,\text{km}$.

b) [2] Máy bay A chuyển động trên đường thẳng d đến vị trí điểm $M\left(-500;100;100\sqrt{11}\right)$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát của đài kiểm soát không lưu sân bay.

c) [3] Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới giữa bên ngoài và vùng kiểm soát của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2 + y^2 + z^2 = 360\,000$.

d) [4] Thời gian đài kiểm soát không lưu kiểm soát được máy bay A là không quá 42 phút.

Lời giải

a) Sai

Sai vì mặt cầu có bán kính bằng $600\left(\mathrm{km}\right)$.

b) Đúng

Độ dài $OM=\sqrt{\left(-500\right)^2+100^2+\left(100\sqrt{11}\right)^2}=\sqrt{370000}\approx 608$ nên nằm ngoài vùng kiểm soát.

c) Đúng

Mặt cầu có tâm O và bán kính bằng 600 có dạng $x^2+y^2+z^2=360000$

d) Đúng

Giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu là:

$$\left(-1000+100t\right)^2+\left(-300+80t\right)^2+\left(100\sqrt{11}\right)^2=360000$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{210}{41}\Rightarrow A\left(-\dfrac{20000}{41};\dfrac{4500}{41};100\sqrt{11}\right)\\ t=10\Rightarrow B\left(0;500;100\sqrt{11}\right)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{\left(\frac{20000}{41}\right)^2+\left(\frac{4500}{41}-500\right)^2}\approx 625\Rightarrow t_{AB}=\frac{AB}{900}\left(h\right)<42\,\text{(phút)}.$$

Câu 2. Trong một đợt kiểm tra sức khỏe, có một loại bệnh X mà tỉ lệ người mắc bệnh $0,4\%$ và một loại xét nghiệm Y mà tỉ lệ người mắc bệnh X khi xét nghiệm Y có phản ứng dương tính là 98%. Tuy nhiên có 5% những người không bị bệnh X lại có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y. Chọn ngẫu nhiên 1 người trong đợt kiểm tra sức khỏe đó. Gọi biến cố A: " Người được chọn không mắc bệnh X " và biến cố B: " Người được chọn có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y "

a) [1] $P(A)=\dfrac{99,6}{100},P(\overline{A})=\dfrac{0,4}{100}$.

b) [2] $P(B|A)=\dfrac{5}{100},P(B|\overline{A})=\dfrac{98}{100}$.

c) [3] Xác suất của biến cố B bằng $\dfrac{1344}{25000}$.

d) [4] Giả sử người được chọn đã có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y. Xác suất để người đó mắc bệnh X là $\dfrac{98}{1343}$.

Lời giải

a) Đúng

Vì tỉ lệ người mắc bệnh X là $0,4\%$ nên tỉ lệ người không mắc bệnh X là $100\%-0,4\%=96,6\%$.

Do đó $P(A)=\dfrac{99,6}{100},P(\overline{A})=\dfrac{0,4}{100}$.

b) Đúng

Theo bài ra: Có 5% những người không bị bệnh X lại có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y nên xác suất để người được chọn có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y biết rằng người được chọn không mắc bệnh X là $P(B|A)=\dfrac{5}{100}$.

Theo bài ra: Tỉ lệ người mắc bệnh X khi xét nghiệm Y có phản ứng dương tính là 98% nên xác suất để người được chọn có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y biết rằng người được chọn mắc bệnh X là $P(B|\overline{A})=\dfrac{98}{100}$.

c) Sai

Theo công thức Xác suất toàn phần thì xác suất của biến cố B bằng $P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=\dfrac{99,6}{100}.\dfrac{5}{100}+\dfrac{0,4}{100}.\dfrac{98}{100}=\dfrac{1343}{25000}\neq\dfrac{1344}{25000}$..

d) Đúng

Theo bài ra: Giả sử người được chọn đã có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y. Khi đó xác suất để người đó mắc bệnh X chính là $P(\overline{A}|B)$.

Ta có $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$.

Mặt khác $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{\dfrac{99,6}{100}.\dfrac{5}{100}}{\dfrac{1343}{25000}}=\dfrac{1245}{1343}$.

Do đó $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)=1-\dfrac{1245}{1343}=\dfrac{98}{1343}$.

Câu 3. Một ô tô đang chuyển động thẳng trên cao tốc với vận tốc $72\,km/h$ thì thấy phía trước cách $70\,m$ có chướng ngại vật. Ngay lúc phát hiện có chướng ngại vật, ô tô hãm phanh để xe chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-3\,m/s^2$.

a) [1] Kể từ lúc bắt đầu quan sát thấy chướng ngại vật, vận tốc của ô tô được tính theo công thức $v(t)=-3t+20$ với t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng m/s.

b) [2] Ô tô dừng lại sau 6 giây kể từ lúc phát hiện chướng ngại vật.

c) [3] Khi ô tô dừng lại, khoảng cách từ ô tô đến chướng ngại vật tính bằng m (làm tròn đến hàng dơn vị) là $3\,m$.

d) [4] Vận tốc trung bình của ô tô từ lúc phát hiện chướng ngại vật đến lúc dừng lại là $9,8\,m/s$.

Lời giải

a) Đúng

Gọi $v(t)$ là vận tốc của ô tô khi đi xe chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-3\,m/s^2$ và $v(t)$ là một nguyên hàm của hàm gia tốc, nên $v(t)=\int a(t)dt=\int -3dt=-3t+C$

Tại thời điểm ô tô bắt đầu hãm phanh, tức $t=0$. Ô tô đang di chuyển với vận tốc $72\,km/h=20\,m/s$ nên $v(0)=-3.0+C=20 \Rightarrow C=20$.

Vậy $v(t)=-3t+20$.

b) Sai

Xét $v(t)=-3t+20=0 \Rightarrow t=\dfrac{20}{3}(s)$. Vậy ô tô đi được $\dfrac{20}{3}s$ thì ô tô sẽ dừng lại, kể từ lúc phát hiện chướng ngại vật.

c) Đúng

Kể từ lúc phát hiện chướng ngại vật, quãng đường ô tô đi được trong $\dfrac{20}{3}s$ là:

$$\int_0^{\frac{20}{3}} v(t)dt=\int_0^{\frac{20}{3}} -3t+20dt=\frac{200}{3}(m)$$

Do đó khoảng cách giữa xe và chướng ngại vật là: $70-\dfrac{200}{3}=\dfrac{10}{3}m$.

d) Sai

Quãng đường xe đi được kể từ lúc phát hiện chướng ngại vật đến lúc dừng lại là: $\dfrac{200}{3}m$

Do đó vận tốc trung bình của ô tô từ lúc phát hiện chướng ngại vật đến lúc dừng lại là: $\dfrac{200}{3}:\dfrac{20}{3}=10\,m/s$.

Câu 4. Cho hàm số $y=\ln(2x-1)-x^2$.

a) [1] Tập xác định của hàm số đã cho là $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

b) [2] Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=\dfrac{1+2x-4x^2}{2x-1}$.

c) [3] Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

d) [4] Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là -1.

Lời giải

a) Đúng

Điều kiện: $2x-1>0 \Rightarrow x>\dfrac{1}{2}$. Suy ra $D=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

b) Sai

$y=\ln(2x-1)-x^2 \Rightarrow y'=\dfrac{2+2x-4x^2}{2x-1}$

c) Sai

$y'=\dfrac{2+2x-4x^2}{2x-1}=0 \Rightarrow 2+2x-4x^2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(n) \\ x=-0,5(l) \end{array}\right.$

d) Đúng

Ta có bảng biến thiên:

x	0.5		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là -1.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn (3,0 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4x^2+3x}{x+1}$. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho cắt đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho tại điểm $M(a;b)$. Tính $a+b$.

Lời giải

Đáp số: -6

Điểm là giao giữa TCX và đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của ĐTHS chính là tâm đối xứng $I(a;b)$ của đồ thị hàm số.

Ta có $f(x)=\dfrac{4x^2+3x}{x+1}=4x-1+\dfrac{1}{x+1}$ suy ra $y=4x-1$ là TCX của ĐTHS.

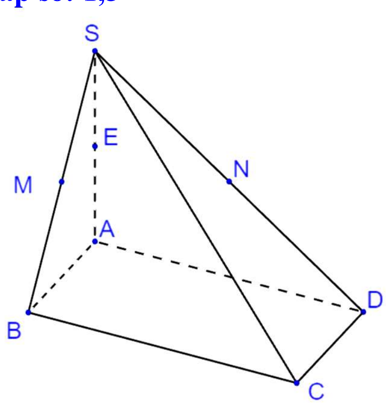
Và TCĐ của ĐTHS là đường thẳng $x=-1$.

Khi đó $a=-1; b=-5 \Rightarrow a+b=-6$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB=2$, $AD=4$. Biết $SA=3$ và $SA\perp(ABCD)$. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SB và SD. Gọi I là điểm cách đều 4 điểm S,A,M,N. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

Đáp số: 1,5



Vì I cách đều 4 điểm S,A,M,N nên I nằm trên mặt phẳng trung trực của SA.

Mặt khác $SA\perp(ABCD)$ suy ra $d(I,(ABCD))=\dfrac{1}{2}SA=\dfrac{3}{2}$.

Câu 3. Một người gửi 300 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% /năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

Lời giải

Đáp số: 11

Gọi $A = 300$ triệu là số tiền gửi vào ngân hàng với lãi suất $r\% = 7\%$ năm.

Số tiền sau 1 năm $A + Ar\% = A(1+r\%)$.

Số tiền sau 2 năm $A(1+r\%) + A(1+r\%)r\% = A(1+r\%)^2$.

……………………………………………………………………

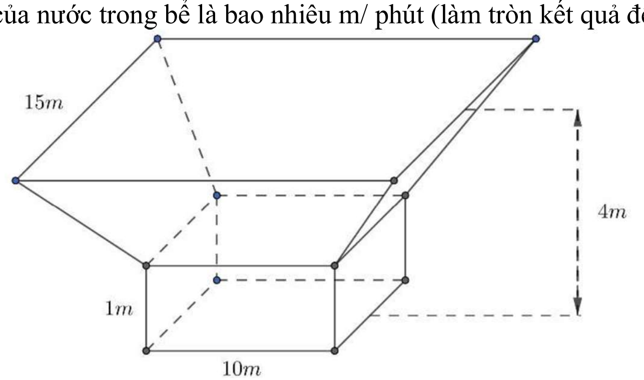
Số tiền sau n năm $M = A(1+r\%)^n$.

Vậy để số tiền nhiều hơn 600 triệu $\Leftrightarrow M > 600 \Leftrightarrow A(1+r\%)^n > 600$

Thay $A = 300, r = 7\% \Rightarrow n > \log_{1,07}\left(\dfrac{600}{300}\right) \approx 10,245$.

Vậy sau ít nhất 11 năm.

Câu 4. Một bể nước có thiết kế phía dưới là hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh 10m, chiều cao là 1m; phía trên là hình chóp cụt đều có đáy trên là hình vuông 15m. Tổng chiều cao của bể 4m (Tham khảo hình vẽ). Lúc đầu bể không có nước, người ta bơm nước vào bể với tốc độ không đổi là $5m^3$ / phút. Hỏi sau một giờ bơm thì tốc độ dâng lên của nước trong bể là bao nhiêu m/ phút (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Lời giải

Đáp số: 0,03

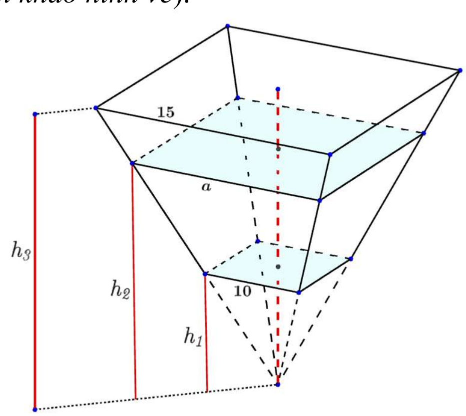
Gọi t (phút) là thời gian bơm nước vào bể, thể tích nước trong bể là $V(t) = 5t\ (m^3)$.

Khi $t = 20$, nước dâng lên hết phần (I) là phần hình hộp chữ nhật ở đáy có thể tích $100m^3$

Khi $t > 20$, nước dâng lên trong phần (II) - phần hình chóp cụt tứ giác đều.

Gọi $V_2(t)$ là thể tích phần nước trong phần(II) $\Rightarrow V_2(t) = 5t - 100$.

Mặt khác, ta xét phần (II) là phần hình chóp cụt tứ giác đều có chiều cao $h = h_2 - h_1$, cạnh đáy là a và 10 (*tham khảo hình vẽ*).



Có $\frac{h_1}{10}=\frac{h_2}{a}=\frac{h_3}{15}$ mà $h_3-h_1=3$ (do chiều cao của bể chứa phần (II) là 3).

$\Rightarrow h=\frac{3}{5}a-6$.

Khi đó theo CT tính thể tích khối chóp cụt: $V_2=\frac{h}{3}\left(a^2+10a+100\right)$

Thay $h=\frac{3}{5}a-6$ ta được $V_2=\frac{(a-10)\left(a^2+10a+100\right)}{5}=\frac{1}{5}a^3-200$.

Mà $V_2(t)=5t-100=\frac{1}{5}a^3-200 \Leftrightarrow a=\sqrt[3]{25t+500}$.

Ta viết lại $h(t)=\frac{3}{5}\sqrt[3]{25t+500}-6$ là hàm chiều cao của nước trong bể với $t>20$.

Vậy sau 60 phút, tốc độ dâng lên của nước trong bể là $h'(60)\approx 0,03$

Câu 5. Cho hai chiếc hộp, hộp I đựng 6 quả bóng vàng và 4 quả bóng đỏ, các quả bóng vàng được đánh số 0;2;4;6;8;10 và các quả bóng đỏ được đánh số 1;3;5;7, hộp II đựng 3 quả bóng vàng và 7 quả bóng đỏ, các quả bóng vàng được đánh số 1;3;5 và các quả bóng đỏ được đánh số 0;2;4;6;8;10;12, các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp I cho vào hộp II, sau đó từ hộp II lấy ngẫu nhiên ra hai quả bóng. Tính xác suất để lấy được hai quả bóng từ hộp II có tích các số trên hai quả bóng đó là số chẵn, biết rằng hai quả lấy ra đã khác màu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 0,95

Gọi A là biến cố: "hai quả bóng lấy từ hộp II có tích các số trên hai quả bóng đó là số chẵn";
B là biến cố: "hai quả bóng lấy từ hộp II khác màu"

Ta cần tính: $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$.

+) Tính $P(B)$.

TH1: Lấy được 1 quả bóng vàng từ hộp I (xác suất: $\frac{6}{10}$), khi đó hộp II có:

4 quả bóng vàng (1 quả đánh số chẵn, 3 quả đánh số lẻ) và 7 quả bóng đỏ (7 quả đánh số chẵn).

Xác suất hai quả bóng lấy từ hộp II khác màu trong trường hợp này là: $\frac{6}{10}.\frac{4.7}{C_{11}^2}=\frac{84}{275}$.

TH2: Lấy được 1 quả bóng đỏ từ hộp I (xác suất: $\frac{4}{10}$), khi đó hộp II có:

3 quả bóng vàng (3 quả đánh số lẻ) và 8 quả bóng đỏ (7 quả đánh số chẵn, 1 quả đánh số lẻ).

Xác suất hai quả bóng lấy từ hộp II khác màu trong trường hợp này là: $\frac{4}{10}.\frac{3.8}{C_{11}^2}=\frac{48}{275}$.

Khi đó: $P(B)=\frac{84}{275}+\frac{48}{275}=\frac{12}{25}$.

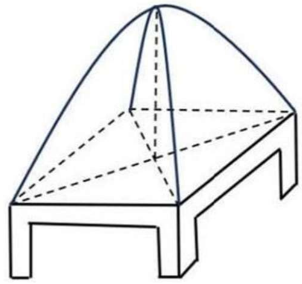
+) Tính $P(AB)$.

AB là biến cố: "hai quả bóng lấy từ hộp II có tích các số trên hai quả bóng đó là số chẵn và khác màu".
Tích hai số tự nhiên là số chẵn khi có một trong hai số là số chẵn.

Ta có: $P(AB)=\frac{6}{10}.\frac{4.7}{C_{11}^2}+\frac{4}{10}.\frac{3.7}{C_{11}^2}=\frac{126}{275}$.

Vậy $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{21}{22}\approx 0,95$.

Câu 6. Cho một cái màn chụp tự bung được làm từ hai khung thép, mỗi khung thép là một nửa elip nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với mặt giường. Hai khung thép đó giao nhau tại đỉnh màn và là đỉnh của hai nửa elip đó. Cái màn được đặt vừa vặn lên mặt giường hình chữ nhật dài 2m và rộng 1,8m. Khoảng cách từ đỉnh màn xuống mặt giường là 1,2m (tham khảo hình bên). Tính thể tích của phần không gian bên trong màn theo đơn vị m^3 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Đáp án: 2,9

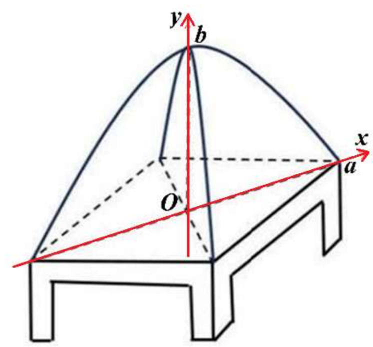
Nhận xét:

1) Mặt cắt ngang cái màn chụp theo mặt phẳng song song với mặt giường luôn luôn là một hình chữ nhật.

2) Mặt giường là một hình chữ nhật có đường chéo bằng: $\sqrt{1,8^2+2^2}=\dfrac{\sqrt{181}}{5}$ m.

$\dfrac{\sqrt{181}}{5}:2=\dfrac{\sqrt{181}}{10}\approx 1,3>1,2\,\text{m}.$

Từ đó ta lắp hệ trục Oxy như hình minh họa sau:



Trong đó: $a=\dfrac{\sqrt{181}}{10};b=1,2$.

Phương trình chính tắc elip: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow x=\pm a.\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

Khi đó: đường chéo của mặt cắt hình chữ nhật bằng $2a.\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}=t$.

Tỉ lệ chiều rộng chia chiều dài của hình chữ nhật: $\dfrac{m}{n}=\dfrac{1,8}{2}\Leftrightarrow m=0,9n$.

Ta có: $m^2+n^2=t^2\Leftrightarrow(0,9n)^2+n^2=t^2\Leftrightarrow n=\dfrac{10}{\sqrt{181}}.t\Rightarrow m=\dfrac{9}{\sqrt{181}}.t$

Diện tích mặt cắt: $S(y)=\dfrac{10}{\sqrt{181}}t.\dfrac{9}{\sqrt{181}}t=\dfrac{90}{181}t^2=\dfrac{90}{181}.4a^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)=\dfrac{18}{5}.\left(1-\dfrac{y^2}{1,44}\right)$.

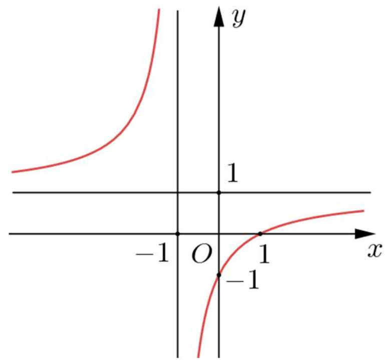
Thể tích của phần không gian bên trong màn:

$V=\int_0^{1,2}S(y)\mathrm{d}y=\int_0^{1,2}\dfrac{18}{5}.\left(1-\dfrac{y^2}{1,44}\right)\mathrm{d}y=\dfrac{72}{25}=2,88\approx 2,9\,\text{m}^3.$

ĐỀ 06 – GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu thí sinh chỉ chọn một phương án

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Biểu thức $f\left(x\right)$ là biểu thức nào sau đây?

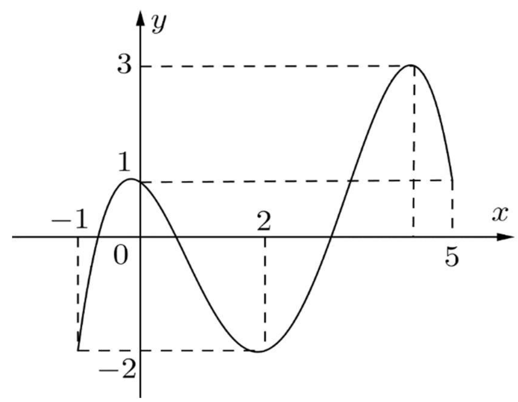
A. $x+\dfrac{1}{x}$. **B.** $-x^3+3x-1$. **C.** x^3-1. **D.** $\dfrac{x-1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng là $x=-1$ nên biểu thức $f\left(x\right)$ là $\dfrac{x-1}{x+1}$.

Câu 2. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-1;5\right]$ và có đồ thị trên đoạn $\left[-1;5\right]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;5\right]$ bằng



A. 4. **B.** 1.
C. 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị ta có: $\max\limits_{[-1;5]} f\left(x\right)=3, \min\limits_{[-1;5]} f\left(x\right)=-2$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;5\right]$ bằng 1.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A\left(1;1;1\right)$ và vuông góc với mặt phẳng tọa độ $\left(Oxy\right)$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k}=\left(0;0;1\right)$.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tọa độ $\left(Oxy\right)$ nên có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=\left(0;0;1\right)$ và đi qua điểm $A\left(1;1;1\right)$ suy ra phương trình cần tìm là $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1+t \end{cases}$.

Câu 4. Đường thẳng $2y+1=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{3-x^2}{2x^2-3x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{1-2x}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-x^2}{2x^2-3x+1}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2y+1=0$. Vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x^2}{2x^2-3x+1}=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 5. Cho hai biến cố A và B, với $P(B)=0,8$, $P(A|B)=0,7$, $P\left(A|\overline{B}\right)=0,45$. Tính $P(B|A)$.

A. $0,65$. **B.** $0,25$. **C.** $0,5$. **D.** $\dfrac{56}{65}$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức xác suất toàn phần:

$P(A)=P(B).P(A|B)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A|\overline{B}\right)=0,8.0,7+0,2.0,45=0,65$.

Theo công thức Bayes: $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{0,8.0,7}{0,65}=\dfrac{56}{65}$. Vậy chọn **D.**

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y			0		|| $+\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty$ ||		2		

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;-2)\cup(-2;-1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-3;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)(-2;-1)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và đi qua điểm $A(0;4;-1)$ là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Lời giải

Chọn B

Bán kính mặt cầu $R=IA=\sqrt{(0+1)^2+(4-2)^2+(-1-1)^2}=3$.

Phương trình mặt cầu tâm I đi qua điểm A: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{3}=1$ là

A. $\vec{n}=(-3;-6;-2)$. **B.** $\vec{n}=(-2;-1;3)$. **C.** $\vec{n}=(2;-1;3)$. **D.** $\vec{n}=(3;6;-2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{3}=1\Leftrightarrow 3x+6y-2z+6=0$.

Vậy mặt phẳng trên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;6;-2)$.

Câu 9. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 2)$ cắt vật thể đó có diện tích $S(x)=2026x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. 1518π. **B.** 3039. **C.** 3039π. **D.** 3036.

Lời giải

Chọn B

Ta có $V=\int_1^2 S(x)dx=\int_1^2 2026xdx=3039$.

Câu 10. Tìm tất cả nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

A. $\frac{1}{2}x^2-\ln|x|$. **B.** $\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+C$. **C.** $\frac{1}{2}x^2-\ln x+C$. **D.** $1-\ln|x|+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F(x)=\int f(x)dx=\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+C$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):6x+8y+10z-1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{5}$. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

A. 45^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{n}_P=(6;8;10);\vec{u}_d=(3;4;5)\Rightarrow \vec{n}_P=2\vec{u}_d$ hay $\vec{n}_P$ và $\vec{u}_d$ cùng phương.

Vậy $d\perp(P)$, do đó góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng 90^0.

Câu 12. Cho hai biến cố độc lập A và B với $P(A)=0,7, P(B)=0,2$. Khi đó, $P(A|B)$ bằng:

A. $0,3$. **B.** $0,7$. **C.** $0,8$. **D.** $0,2$.

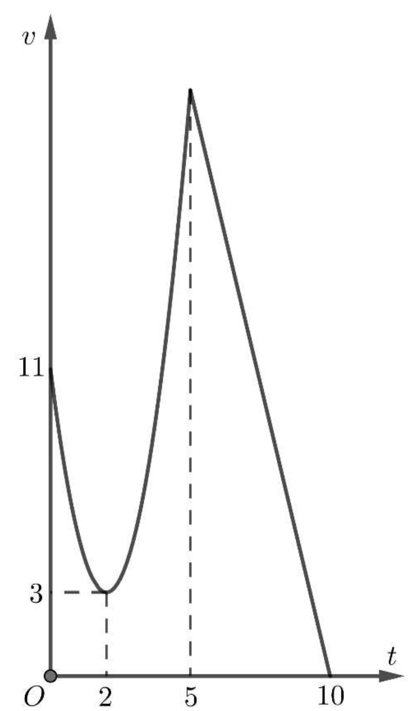
Lời giải

Chọn B

Ta có hai biến cố độc lập A và B suy ra $P(A|B)=P(A)=0,7$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a), b), c), d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một chất điểm chuyển động theo quy luật với tốc độ $v(t)(m/s)$, biết rằng $v(t)$ có dạng đường parabol (P) có đỉnh $I(2;3)$ khi $0\le t\le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5\le t\le 10(s)$ (Hình vẽ).



a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $v(t)$, trục Ot, và hai đường thẳng $t=0, t=10$ là $\frac{395}{6}$ (đvdt).

b) Quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ giây thứ 5 đến giây thứ 10 là $\frac{385}{2}(m)$.

c) Quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 giây đến 5 giây là $\frac{115}{3}(m)$.

d) Phương trình parabol (P) là: $v(t)=2t^2-8t+10$.

Lời giải

a) SAI

+) Parabol (P) có đỉnh $I(2;3)$ nên phương trình (P) có dạng: $v=a(t-2)^2+3$.

+) (P) đi qua điểm có tọa độ $(0;11)$ nên $11=4a+3\Leftrightarrow a=2$.

Vậy phương trình (P) là $v=2(t-2)^2+3$ hay $v(t)=2t^2-8t+11$.

Theo đồ thị, khi $t=5 \Rightarrow v(5)=21$.

+) Đường thẳng d có dạng: $v=mt+n$.

+) Đường thẳng d đi qua hai điểm $(5;21)$ và $(10;0)$ nên $\begin{cases}5m+n=21\\10m+n=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=-\dfrac{21}{5}\\n=42\end{cases}$

Vậy phương trình $d: v=-\dfrac{21}{5}t+42$.

Do đó $v(t)=\begin{cases}2t^2-8t+11, & 0\le t\le 5\\ -\dfrac{21}{5}t+42, & 5\le \mathrm{t}\le 10\end{cases}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $v(t)$, trục Ot, và hai đường thẳng $t=0, t=10$ là

$S=\int\limits_0^5(2t^2-8t+11)\mathrm{d}t+\int\limits_5^{10}\left(-\dfrac{21}{5}t+42\right)\mathrm{d}t=\dfrac{545}{6}$ (đvdt).

b) SAI

Quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ giây thứ 5 đến giây thứ 10 là

$S_1=\int\limits_5^{10}\left(-\dfrac{21}{5}t+42\right)\mathrm{d}t=52,5(m)$

c) ĐÚNG

Quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 giây đến 5 giây là

$S_2=\int\limits_0^5(2t^2-8t+11)\mathrm{d}t=\dfrac{115}{3}(m)$.

d) SAI

Parabol (P) có đỉnh $I(2;3)$ nên phương trình (P) có dạng: $v=a(t-2)^2+3$.

Lại có (P) đi qua điểm có tọa độ $(0;11)$ nên $11=4a+3 \Leftrightarrow a=2$.

Vậy phương trình (P) là $v=2(t-2)^2+3$ hay $v(t)=2t^2-8t+11$.

Câu 2. Một hộp có 80 viên bi, trong đó có 50 viên bi màu đỏ và 30 viên bi màu vàng. Các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi kiểm tra, người ta thấy có 60% số viên bi màu đỏ đánh số và 50% số viên bi màu vàng có đánh số, những viên bi còn lại không đánh số. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi trong hộp.

a) Xác suất chọn được viên bi màu vàng có đánh số bằng 18,57%.

b) Xác suất chọn được viên bi màu đỏ bằng 62,5%.

c) Xác suất chọn được viên bi không đánh số bằng 43,75%.

d) Giả sử viên bi được lấy ra là viên bi chưa được đánh số, xác suất để viên bi đó là bi đỏ thấp hơn xác suất viên bi đó là bi vàng.

Lời giải

a) SAI

Số bi vàng có đánh số là: $30.50\%=15$.

Số viên bi trong hộp là 80.

Vậy xác suất chọn được viên bi màu vàng có đánh số bằng $\dfrac{15}{80}=\dfrac{3}{16}=18,75\%$.

b) ĐÚNG

Trong hộp có 50 viên bi màu đỏ. Số viên bi trong hộp là 80.

Vậy xác suất chọn được viên bi màu đỏ bằng $\dfrac{50}{80}=62,5\%$.

c) ĐÚNG

Số bi đỏ có đánh số là: $50.60\%=30$.

Số bi vàng có đánh số là: $30.50\%=15$.

Vậy số viên bi không đánh số là $80-30-15=35$.

Khi đó: xác suất chọn được viên bi không đánh số bằng $\frac{35}{80}=43,75\%$.

d) SAI

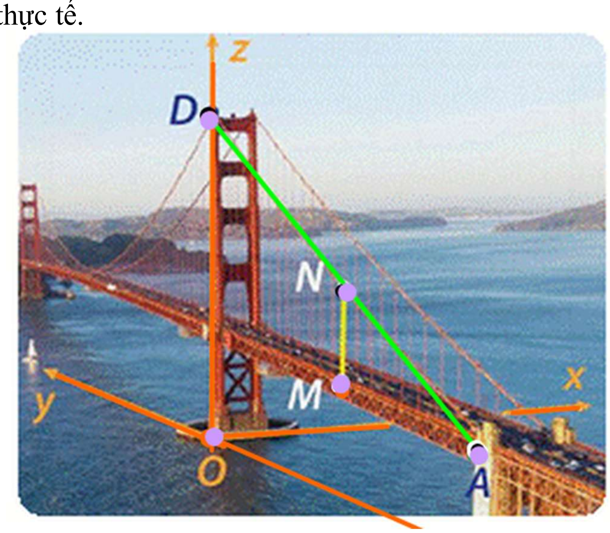
Gọi A là biến cố viên bi được chọn màu đỏ. Khi đó $\overline{A}$ là biến cố viên bi được chọn màu vàng.

Gọi B là biến cố viên bi được chọn có đánh số. Khi đó $\overline{B}$ là biến cố viên bi được chọn không đánh số.

$$P\left(A|\overline{B}\right)=\frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7};\ P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}.$$

Vậy viên bi được lấy ra là viên bi chưa được đánh số, xác suất để viên bi đó là bi đỏ cao hơn xác suất viên bi đó là bi vàng.

Câu 3. Cầu Cổng Vàng (The Golden Gate Bridge) ở Mỹ được gắn hệ trục toạ độ Oxyz với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (được xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz, biết rằng điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước $227m$, điểm A cách mặt nước $75m$ và cách trục Oz $343m$, biết rằng 1 đơn vị trên hệ trục tọa độ tương ứng với 1m trên thực tế.



a) [NB] Đường thẳng AD có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AD}=(0;-343;152)$.

b) [TH] Tọa độ điểm A là $(0;-343;75)$.

c) [TH] Độ dài đoạn dây cáp AD là $AD=\sqrt{140753}\,(m)$.

d) [VD,VDC] Từ điểm M trên thành cầu, M thuộc mặt phẳng Oyz (như hình vẽ) cách mặt nước 75m, cách trục Oz 5m, người ta treo một đèn led trang trí có dạng đoạn thẳng MN (với N thuộc dây cáp AD), biết rằng 1m đèn led có giá 125000 đồng, số tiền thấp nhất có thể sử dụng để lắp đèn led (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng) là 17118000 đồng.

Lời giải

a) Theo giả thiết ta có: $A(0;-343;75),D(0;0;227)\Rightarrow\overrightarrow{AD}=(0;343;152)$. Do đó đường thẳng AD có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AD}=(0;343;152)$. Vậy a) Sai.

b) Tọa độ điểm A là $(0;-343;75)$. Vậy b) Đúng.

c) Độ dài đoạn dây cáp AD là $AD=\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{0^2+343^2+152^2}=\sqrt{140753}\,(m)$. Vậy c) Đúng.

d) Ta có: $M(0;-5;75)$.

MN ngắn nhất khi và chỉ khi $MN\perp AD$. Ta có: $\overrightarrow{AM}=(0;338;0)$; $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD}\right]=(51376;0;0)$.

Khi đó $MN_{\min} = d\left(M, AD\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \dfrac{51376}{\sqrt{140753}}\left(m\right)$.

Suy ra số tiền thấp nhất có thể sử dụng để lắp đèn led là $\dfrac{51376}{\sqrt{140753}}.125000 \approx 17118000$ (đồng).

Vậy d) Đúng.

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ có đồ thị (C).

a) [NB] Hàm số có 2 điểm cực trị.

b) [TH] Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

c) [TH] Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x = 1$.

d) [VD] M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Tích khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị (C) bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải:

a) Đúng

Hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} = x + 3 + \dfrac{2}{x - 1}$,

Tập xác định $D = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, đạo hàm $y' = 1 - \dfrac{2}{\left(x - 1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$

b) Sai

Vì hàm số không xác định tại $x = 1 \in (0; 2)$.

c) Đúng

Vì $\lim\limits_{x \to 1+}\left(x + 3 + \dfrac{2}{x - 1}\right) = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

d) Đúng

Giả sử $M\left(x_0; x_0 + 3 + \dfrac{2}{x_0 - 1}\right)$ với $x_0 \neq 1$ là điểm bất kỳ thuộc

+) Khoảng cách từ M tới tiệm cận đứng $x = 1$ là $\left|x_0 - 1\right|$

+) Khoảng cách từ M tới tiệm cận xiên $y = x + 3 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$ là

$$\frac{\left|x_0 - \left(x_0 + 3 + \dfrac{2}{x_0 - 1}\right) + 3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\dfrac{2}{x_0 - 1}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\left|x_0 - 1\right|}$$

Tích khoảng cách từ M tới tiệm cận đứng và tiệm cận xiên là

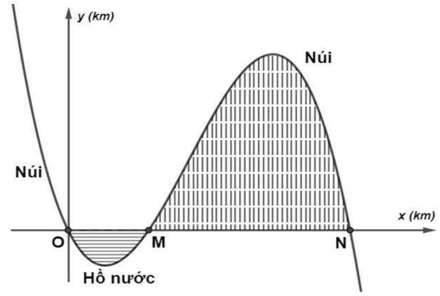
$\left|x_0 - 1\right| . \dfrac{\sqrt{2}}{\left|x_0 - 1\right|} = \sqrt{2}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách $OM = 2km$; độ rộng của núi $MN = 3,5km$. Độ sâu của hồ nước là 450m. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp số: 1191

Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$

Ta có: $ON = OM + MN = 2 + 3,5 = 5,5(km)$

Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại các điểm: $O(0;0), M(2;0)$ và $N(5,5;0)$

Khi đó, phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là $x = 0; x = 2; x = 5,5$.

$\Rightarrow f(x) = k.x(x-2)(x-5,5) = k(x^3 - 7,5x^2 + 11x)$ với đồ thị hàm số $\lim\limits_{x \to +\infty} = -\infty$ nên $k < 0$

Ta có: $f'(x) = k(3x^2 - 15x + 11)$

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow k(3x^2 - 15x + 11) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 15x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{15 \pm \sqrt{93}}{6}$.

Độ sâu của hồ nước là $450m = 0,45km$ nên ta có giá trị cực tiểu của đồ thị hàm số trên là $y_{CT} = -0,45$.

Suy ra, $f\left(\dfrac{15-\sqrt{93}}{6}\right) = -0,45 \Leftrightarrow k.\dfrac{-135+31\sqrt{93}}{36} = -0,45 \Leftrightarrow k = \dfrac{-16,2}{-135+31\sqrt{93}}$.

Chiều cao của ngọn núi tương ứng với $y_{CĐ} = f\left(\dfrac{15+\sqrt{93}}{6}\right) \approx 1,19106(km) \approx 1191(m)$.

Vậy ngọn núi cao khoảng $1191m$.

Câu 2. Một chất điểm chuyển động biết quãng đường biểu diễn theo quỹ đạo có phương trình $s(t) = t^3 - 6t^2 + 30t$ (trong đó quãng đường s tính bằng mét (m), thời gian t tính bằng giây (s)). Tìm tốc độ nhỏ nhất của chất điểm (đơn vị (m/s)).

Lời giải

Đáp số: 18

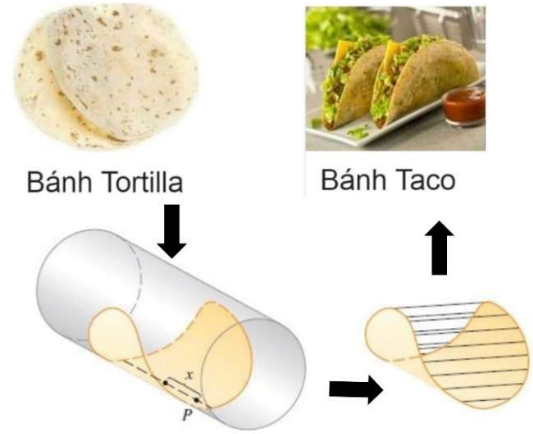
$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 30$.

Xét hàm $v(t) = 3t^2 - 12t + 30 = 3(t-2)^2 + 18 \geq 18 \forall t$.

Vậy $\min\limits_{[0;+\infty)} v(t) = 18 \Leftrightarrow t = 2$.

Tốc độ nhỏ nhất của chất điểm bằng $18(m/s)$.

Câu 3. Bánh Taco là một món ăn đặc trưng của Mexico, bánh Taco được tạo thành từ một chiếc bánh Tortilla (bánh ngô) cuộn quanh thức ăn. Cụ thể, để làm một chiếc bánh Taco ta lấy bánh Tortilla tròn có đường kính 20 cm đặt vào mặt trong của hình trụ có bán kính $R = 4$ cm, dọc theo đường kính của Tortilla và gấp bánh lại quanh hình trụ. Sau đó ta sẽ đổ đầy thịt, phô mai, và rau củ đến tận mép bánh. Gọi x là khoảng cách từ tâm bánh Tortilla đến một điểm P trên đường kính (tham khảo hình vẽ).



Tính thể tích của bánh Taco theo đơn vị cm^3 (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

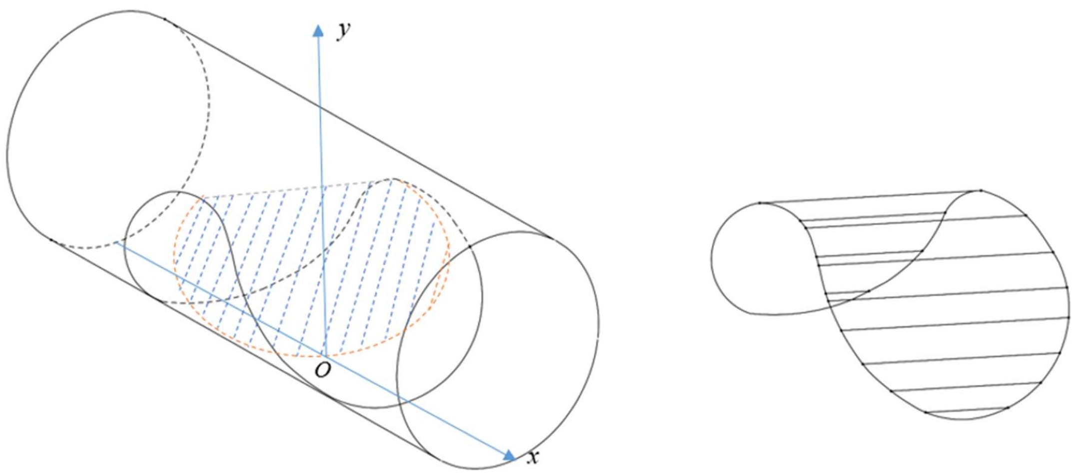
Lời giải

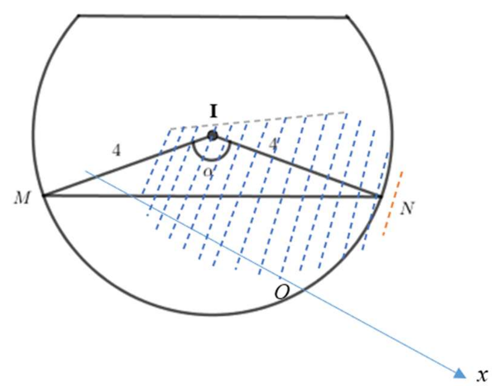
Chu vi của đường tròn có bán kính bằng 4 là $2.4\pi \approx 25,132$.

Như vậy khi trải miếng bánh có đường kính 20 thì còn thừa hai đầu là $2.4\pi - 20 \approx 5,132$.

Xét mặt cắt ngang của miếng bánh, mỗi mặt cắt vuông góc với trục tọa độ Ox là một hình quạt.

Gọi $x; -10 \le x \le 10$ là hoành độ của mặt phẳng cắt trên





Ta có $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{MN}}{R} = \dfrac{2\sqrt{10^2 - x^2}}{4} = \dfrac{\sqrt{10^2 - x^2}}{2}$.

Diện tích mặt cắt

$$S(x) = \frac{MN}{2}.R - S_{\Delta IMN} = \frac{2\sqrt{10^2 - x^2}.4}{2} - \frac{1}{2}4^2 \sin\left(\frac{\sqrt{10^2 - x^2}}{2}\right) = 4\sqrt{10^2 - x^2} - 8\sin\left(\frac{\sqrt{10^2 - x^2}}{2}\right).$$

Khi đó thể tích chiếc bánh là $V=2\int_0^{10} S(x)\,dx=2\int_0^{10}\left[4\sqrt{10^2-x^2}-8\sin\left(\frac{\sqrt{10^2-x^2}}{2}\right)\right]\approx 711\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 4. Tại địa phương A, người ta tiến hành một đợt kiểm tra diện rộng các con bò để phát hiện một loại bệnh X, không có xét nghiệm nào cho kết quả chính xác 100%. Có một loại xét nghiệm, mà ở đây ta gọi là xét nghiệm Z cho kết quả như sau: Xét nghiệm có độ nhạy 84% (Độ nhạy là xác suất chọn được một mẫu dương tính biết rằng mẫu bị nhiễm bệnh); xác suất dương tính giả là 8% (Dương tính giả là xét nghiệm dương tính nhưng thực tế không bị nhiễm bệnh). Biết rằng tỉ lệ bò ở địa phương A bị mắc bệnh X là 25%. Chọn ngẫu nhiên một con bò địa phương A để xét nghiệm, tính xác suất để chọn được con bò bị nhiễm bệnh, biết rằng con bò dương tính với xét nghiệm (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: $0,78$.

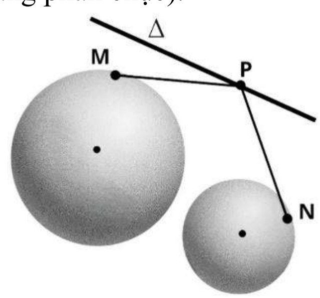
Gọi M là biến cố "Chọn được một con bò bị nhiễm bệnh"

N là biến cố "Chọn được một con bò dương tính với xét nghiệm"

Theo giả thiết bài toán, ta có $P(M)=0,25;\ P(N|M)=0,84;\ P(N|\overline{M})=0,08$.

Vậy $P(M|N)=\dfrac{P(M).P(N|M)}{P(M).P(N|M)+P(\overline{M}).P(N|\overline{M})}=\dfrac{0,25.0,84}{0,25.0,84+0,75.0,08}=\dfrac{7}{9}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+(z-1)^2=16$ và mặt cầu $(S_2): x^2+(y-12)^2+(z+4)^2=1$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-12}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{2}$. Các điểm M,N,P di chuyển và lần lượt thuộc $(S_1),(S_2),\Delta$ (tham khảo hình vẽ). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MP+PN$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: 25,7.

Ta có:

(S_1) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $r_1=4$.

(S_2) có tâm $J(0;12;-4)$, bán kính $r_2=1$.

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;2)$ và đi qua $D(12;-1;3)$.

$$\Delta:\frac{x-12}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=12+t\\ y=-1+2t\\ z=3+2t\end{cases}\Rightarrow P(t+12;2t-1;2t+3)$$

Dễ thấy $MP+PN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow PI+PJ=MP+PN+5$ nhỏ nhất.

Cách 1:

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$l=IP+JP=\sqrt{(t+12)^2+(2t-1)^2+(2t+2)^2}+\sqrt{(t+12)^2+(2t-13)^2+(2t+7)^2}$$

$$=\sqrt{9t^2+28t+149}+\sqrt{9t^2+362}=\sqrt{\left(3t+\frac{14}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{1145}}{9}\right)^2}+\sqrt{(-3t)^2+\left(\sqrt{362}\right)^2}$$

Đặt $\vec{u}=\left(3t+\frac{14}{3};\frac{\sqrt{1145}}{3}\right),\vec{v}=\left(-3t;\sqrt{362}\right)\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=\left(\frac{14}{3};\frac{\sqrt{1145}+3\sqrt{362}}{3}\right)$

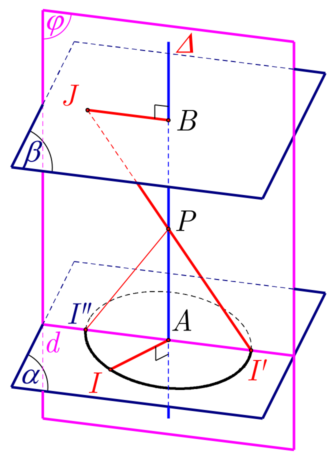
Ta có: $l=\ |\vec{u}|+|\vec{v}|\ \geq\ |\vec{u}+\vec{v}|\ =\sqrt{\left(\frac{14}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{1145}+3\sqrt{362}}{3}\right)^2}\approx 30,66.$

Đẳng thức xảy ra khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng hay

$$\left(3t+\frac{14}{3}\right)\sqrt{362}=-3t.\frac{\sqrt{1145}}{3}\Leftrightarrow t=\frac{-14\sqrt{362}}{3\left(3\sqrt{362}+\sqrt{1145}\right)}=\frac{14\sqrt{414490}-15204}{6339}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MP+PN$ là $l-5\approx 25,7.$

Cách 2:



Gọi các mặt phẳng: mp(α) qua $I\&\perp\Delta$; mp(β) qua $J\&\perp\Delta$; $\text{mp}(\varphi)\equiv\text{mp}(J;\Delta)$

Khi đó:

$(\alpha): x+2y+2z-2=0$

$(\varphi): 40x+17y-37z-352=0$

Gọi $A=\Delta\cap(\alpha)\Rightarrow A\left(\frac{94}{9};-\frac{37}{9};-\frac{1}{9}\right)$ và $d=(\alpha)\cap(\varphi)\Rightarrow d:\begin{cases}x=\frac{670}{63}+12t\\ y=-\frac{272}{63}-13t\\ z=7t\end{cases}$

Gọi $I'\in \text{d}\Rightarrow I'\left(\frac{670}{63}+12t;-\frac{272}{63}-13t;7t\right)$ thỏa $AI'=AI.$

Khi đó, trong mặt phẳng $(\varphi): I'J\cap\Delta=P$ thỏa $PJ+PI=PJ+PI'$ vì $PI=PI'$ $(\forall P\in\Delta)$

Khi đó $PJ+PI$ nhỏ nhất khi và chỉ khi J,P,I' thẳng hàng và P nằm giữa A,B (Dễ dàng chứng minh P nằm ngoài A,B không thỏa nhỏ nhất).

Tìm I':

$$AI'=AI\Leftrightarrow\left(12t+\frac{4}{21}\right)^2+\left(-13t-\frac{13}{63}\right)^2+\left(7t+\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1145}{9}$$

$$\Leftrightarrow 1436778t^2+45612t-504583=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\approx 0,57695293\Rightarrow JI'\approx 30,66\text{ (khác phía }\Delta)\\ t\approx -0,6086989\Rightarrow JI'\approx 9,044\text{ (cùng phía }\Delta)\end{array}\right.$$

Vậy $PM+PN=PI+PJ-5=JI'-5\approx 25,7.$

Cách 3: Dựa vào cách 2 tính nhanh

$\overrightarrow{IJ}=(0;12;-5);\overrightarrow{ID}=(12;-1;2);\overrightarrow{JD}=(12;-13;7);\vec{u}=(1;2;2).$

$$PM+PN+5=I'J=\sqrt{\frac{1}{|\vec{u}|^2}\left[\left(\left|\left[\overrightarrow{ID},\vec{u}\right]\right|+\left|\left[\overrightarrow{JD},\vec{u}\right]\right|\right)^2+\left(\overrightarrow{IJ}\cdot\vec{u}\right)^2\right]}\approx 30,66.$$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét), một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có sàn nhà nằm ngang trên mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-3z+18=0$. Hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x-y=0$, $(Q): x+y-2z=0$. Hỏi chiều cao của ngôi nhà tính từ sàn nhà đến nóc nhà (điểm cao nhất của mái nhà) là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần chục)

.

Lời giải

Đáp án: 4,8.

Cần tìm tọa độ một điểm thuộc đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q)

Cho $y=0$, ta giải hệ phương trình: $\begin{cases}x=0\\x-2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$

Do đó gốc tọa độ $O(0;0;0)$ thuộc đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q)

Khi đó chiều cao từ sàn nhà đến nóc nhà là $d(O;(P))=\dfrac{18}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}}=\dfrac{9\sqrt{14}}{7}\approx 4,8m$.

---HẾT---

ĐỀ 07 – GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cường độ âm thanh (dB) tại một địa điểm được đo liên tục trong 12 giờ là một hàm số $y=f(t)$ có bảng biến thiên như sau:

t	0		3		8		12
$f'(t)$		+	0	–	0	+	
$f(t)$	40	↗	70	↘	25	↗	60

Tại thời điểm t bằng bao nhiêu trong thời gian khảo sát thì cường độ âm thanh là nhỏ nhất ?

A. 8. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 25 .

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên ta thấy tại thời điểm $t=8$ thì hàm số đạt cường độ âm thanh nhỏ nhất là 25.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=4; u_2=1$. Giá trị của u_{10} bằng

A. $u_{10}=31$. **B.** $u_{10}=-23$. **C.** $u_{10}=-20$. **D.** $u_{10}=15$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_1=4; u_2=1$, suy ra $d=-3$

Vậy $u_{10}=u_1+9d=4+9.(-3)=-23$.

Câu 3. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{20x+3}{x+4}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[4;10\right]$ là

A. $\dfrac{83}{8}$. **B.** $\dfrac{29}{2}$. **C.** -4. **D.** $-\dfrac{20}{3}$.

Lời giải

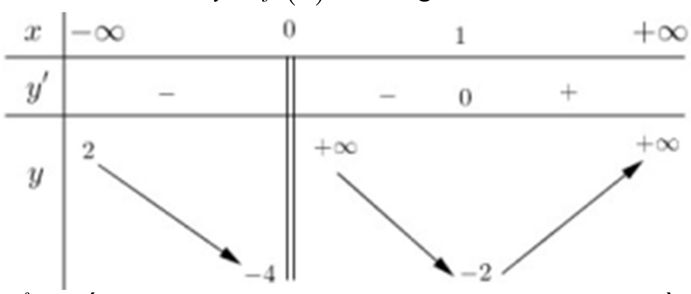
Chọn B

Hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{20x+3}{x+4}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-4\right\}$.

Vì $f'\left(x\right)=\dfrac{77}{\left(x+4\right)^2}>0,\forall x\neq -4$ nên hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của hàm số, do đó hàm số đồng biến trên đoạn $\left[4;10\right]$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[4;10\right]$ là $f\left(10\right)=\dfrac{20.10+3}{10+4}=\dfrac{203}{14}=\dfrac{29}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Quan sát bảng biến thiên ta thấy:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)=+\infty$ nên đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang.

Câu 5. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=\left(2;2;-4\right)$ và $\vec{b}=\left(1;5;2\right)$. Toạ độ của vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ là

A. $\vec{a}-\vec{b}=\left(1;-3;-6\right)$. **B.** $\vec{a}-\vec{b}=\left(-1;-3;-6\right)$. **C.** $\vec{a}-\vec{b}=\left(-1;3;6\right)$. **D.** $\vec{a}-\vec{b}=\left(2;10;-8\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a}-\vec{b}=\left(1;-3;-6\right)$.

Câu 6. Mỗi ngày bà Minh đều đi bộ để rèn luyện sức khoẻ. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bà Minh trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	$[2,7;3,0)$	$[3,0;3,3)$	$[3,3;3,6)$	$[3,6;3,9)$	$[3,9;4,2)$
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. $1,5\left(\text{km}\right)$. **B.** $0,9\left(\text{km}\right)$. **C.** $0,6\left(\text{km}\right)$. **D.** $0,3\left(\text{km}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là $R=4,2-2,7=1,5\left(\text{km}\right)$.

Câu 7. Cho hàm số $f\left(x\right)=2e^x+4x^3$ xác định trên $\mathbb{R}$, khi đó

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=2e^x+x^4+C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=2e^x+x^3+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=2e^x+12x^2+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=2e^x-x^4+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(2e^x+4x^3\right)\mathrm{d}x = 2e^x+x^4+C$.

Câu 8. Giả sử $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x = 25$ và $\int\limits_0^9 g(x)\mathrm{d}x = -23$. Khi đó, $\int\limits_0^9\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=-19$. **B.** $I=119$. **C.** $I=1071$. **D.** $I=-171$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_0^9\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x + 3\int\limits_0^9 g(x)\mathrm{d}x = 2.25+3.(-23) = -19$.

Câu 9. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=5^x$, $y=6$, $x=0$, $x=1$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $S=\int\limits_0^1\left(5^x-6\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_0^1\left|6-5^x\right|\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int\limits_0^1\left|5^x-6\right|\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_0^1\left(6-5^x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Vì $0\le x\le 1$ nên $5^0\le 5^x\le 5^1 \Leftrightarrow 1-6\le 5^x-6\le 5-6 \Leftrightarrow -5\le 5^x-6\le -1$.

Do đó $5^x-6<0,\ \forall x\in[0;1]$. Vậy $S=\int\limits_0^1\left|5^x-6\right|\mathrm{d}x = \int\limits_0^1\left(6-5^x\right)\mathrm{d}x$.

Lưu ý: Có thể dùng đồ thị của hai hàm số $y=5^x$, $y=6$ để giải thích.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(5;0;-6)$ và bán kính bằng $3\sqrt{5}$. Phương trình của (S) là

A. $(x+5)^2+y^2+(z-6)^2=45$. **B.** $(x-5)^2+y^2+(z+6)^2=15$.

C. $(x-5)^2+y^2+(z+6)^2=45$. **D.** $(x+5)^2+y^2+(z-6)^2=15$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(5;0;-6)$ và bán kính bằng $3\sqrt{5}$ có phương trình là

$(x-5)^2+y^2+(z+6)^2=45$.

Câu 11. Tập nghiệm của phương trình $2\sin x-\sqrt{3}=0$ là

A. $\left\{x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\left\{x=\frac{\pi}{3}+2k\pi; x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $2\sin x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $7^{2x-5}=343$ là

A. $x=5$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $7^{2x-5}=343 \Leftrightarrow 7^{2x-5}=7^3 \Leftrightarrow 2x-5=3 \Leftrightarrow x=4$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=x-\sin 2x$.

a) [1] $f'(x)=1+2\cos 2x$

b) [2] Khi $f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos 2x=-\dfrac{1}{2}$.

c) [3] Trên đoạn $[0;\pi]$ phương trình $f'(x)=0$ có tổng các nghiệm bằng π.

d) [4] Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;\pi]$ là $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{5\pi}{6}$.

Lời giải

a) Sai.

Ta có: $f'(x)=1-2\cos 2x$.

b) Sai.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

c) Đúng.

$$\cos 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

Với $x\in[0;\pi] \Rightarrow x\in\left\{\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right\}$. Khi đó tổng các nghiệm bằng $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6}=\pi$.

d) Đúng.

Trên đoạn $[0;\pi]$ phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm $x\in\left\{\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Ta có: $f(0)=0; f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}; f(\pi)=\pi.$

Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;\pi]$ là $\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2. Ở nhiệt độ thường $(37^\circ C)$, một phản ứng hóa học từ chất đầu A, chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A\to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y(x)>0$ với mọi $x\ge 0$, thỏa mãn hệ thức $y'(x)=-7.10^{-4}y(x)$ với $x\ge 0$. Biết rằng tại $x=0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05$ mol L^{-1}. Xét hàm số $f(x)=\ln y(x)$ với $x\ge 0$.

a) [1] $f'(x)=-7.10^{-4}$.

b) [2] $f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0,05)$.

c) [3] $y(30)-y(15)=-6.10^{-4}$.

d) [4] Nồng độ trung bình chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng là $0,05$ mol L^{-1}.

Lời giải

a) Đúng.

Ta có: $y'(x)=-7.10^{-4}y(x) \Leftrightarrow \dfrac{y'(x)}{y(x)}=-7.10^{-4}$.

$f(x)=\ln y(x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{y'(x)}{y(x)}=-7.10^{-4}$.

b) Đúng.

Ta có: $\int f'(x)dx=\int -7.10^{-4}dx\Leftrightarrow f(x)=\ln y(x)=-7.10^{-4}x+C.$

Do nồng độ (đầu) của A là $0,05$ mol L^{-1} nên

$f(0)=\ln 0,05=-7.10^{-4}.0+C\Rightarrow C=\ln 0,05$.

Suy ra $f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0,05)$.

c) Sai.

Ta có: $f(30)=-210.10^{-4}+\ln 0.05\Rightarrow y(30)=e^{f(30)}\approx 0,04896$.

$f(15)=-105.10^{-4}+\ln 0.05\Rightarrow y(15)=e^{f(15)}\approx 0,04948$

$y(30)-y(15)\approx -5,2.10^{-4}$.

d) Đúng.

$\ln y(x)=-7.10^{-4}x+\ln 0,05\Rightarrow y(x)=e^{-7.10^{-4}x+\ln 0,05}$.

Nồng độ trung bình chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây bằng:

$\dfrac{1}{30-15}\int_{15}^{30}y(x)dx=\dfrac{1}{15}\int_{15}^{30}e^{-7.10^{-4}x+\ln 0,05}dx\approx 0,05(\text{mol } L^{-1})$.

Câu 3. Trong không gian $(Oxyz)$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilomét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1;3;7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là $3km$.

a) [1] Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+7)^2=9$

b) [2] Nếu người dùng điện thoại ở vị trí điểm $A(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) [3] Nếu người dùng điện thoại ở vị trí điểm $B(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) [4] Tính theo đường chim bay, khoảng cách lớn nhất để mọi người ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét là $8km$.

Lời giải

a) Sai.

Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là

$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=9$

b) Đúng.

Vị trí $A(2;2;7)$ cách trạm thu phát sóng một khoảng bằng $IA=\sqrt{2}<R=3$. Nên người dùng điện thoại ở vị trí điểm $A(2;2;7)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Đúng.

Vị trí $B(5;6;7)$ cách trạm thu phát sóng một khoảng bằng $IB=5>R=3$. Nên người dùng điện thoại ở vị trí điểm $B(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Sai.

Khoảng cách lớn nhất để mọi người ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng là

$\sqrt{IB^2-R^2}=\sqrt{(4^2+3^2+0^2)-3^3}=4km$.

Câu 4. Ông An hằng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe máy là 0,4. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe buýt là 0,7. Xét một tuần mà thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt.

Gọi A là biến cố: "Thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy" và B là biến cố: “Thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy”.

a) [1] Xác suất để thứ Ba, ông An đi làm bằng xe buýt là 0,7.

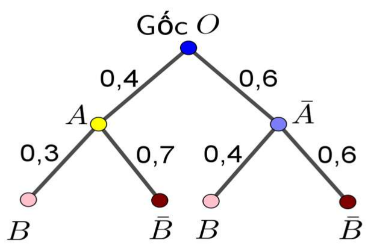
b) [2] Xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy là 0,3.

c) [3] Xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba ông An đi làm bằng xe buýt 0,4.

d) [4] Xác suất để thứ Tư trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt là 0,36.

Lời giải

Từ giả thiết của bài toán ta có sơ đồ hình cây như sau:



a) Chọn SAI.

Xác suất để thứ Ba, ông An đi làm bằng xe buýt là 0,7.

Dựa vào sơ đồ cây ta có xác suất để thứ Ba, ông An đi làm bằng xe buýt là 0,6 (nhánh $O\overline{A}$).

b) Chọn ĐÚNG.

Xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy là 0,3.

Dựa vào sơ đồ cây ta có xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy là 0,3 (nhánh AB)

c) Chọn ĐÚNG.

Xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba ông An đi làm bằng xe buýt 0,4

Dựa vào sơ đồ cây ta có xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba ông An đi làm bằng xe buýt 0,4 (nhánh $\overline{A}B$)

d) Chọn ĐÚNG.

Xác suất để thứ Tư trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt là 0,36

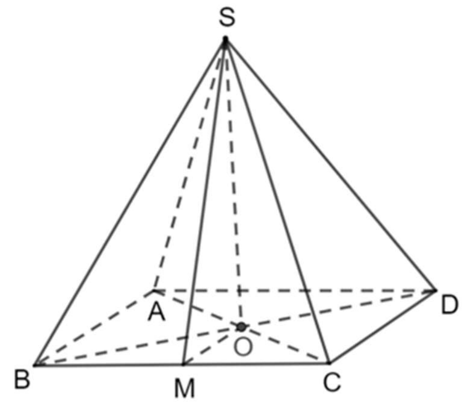
Xác suất để thứ Tư trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt là $P\left(B\right)=0,4.0,3+0,6.0,4=0,36$ (nhánh OAB và nhánh $O\overline{A}B$)

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Độ dốc của mái nhà là tang của góc tạo bởi mái nhà đó với mặt phẳng nằm ngang. Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều, biết rằng diện tích để lát tất cả các mặt của kim tự tháp bằng 80300 m^2 và độ dốc của mặt bên kim tự tháp bằng $\frac{49}{45}$. Hỏi kim tự tháp cao bao nhiêu mét? (Làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Đáp án: 98



Mô hình hoá kim tự tháp bằng chóp tứ giác đều S.ABCD với O là tâm của đáy.
Kẻ $OM \perp BC$.

Ta có góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp là góc $\widehat{SMO} \Rightarrow \tan\widehat{SMO} = \dfrac{49}{45} = \dfrac{SO}{OM}$

Đặt $\begin{cases} SO = 49x \\ OM = 45x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{4426}x \\ BC = AB = 2OM = 90x \end{cases}$

Diện tích tất cả các mặt của kim tự tháp là

$S = 4S_{\Delta SBC} + S_{ABCD} \Leftrightarrow 4.\dfrac{1}{2}SM.BC + AB^2 = 80300$

$\Leftrightarrow 2x\sqrt{4426}.90x + (90x)^2 = 80300$

$\Rightarrow SO = 49x \approx 98m$

Câu 2. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm. Nhà máy A cần bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Đáp án: 70,7

Số tiền mà nhà máy A thu được từ việc bán x tấn sản phẩm $(0 \le x \le 100)$ cho nhà máy B là: $R(x) = x.P(x) = x(45 - 0,001x^2) = 45x - 0,001x^3$ (triệu đồng).

Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng).

Lợi nhuận (triệu đồng) mà nhà máy A thu được là:

$P(x) = R(x) - C(x) = 45x - 0,001x^3 - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100$

Xét hàm số $P(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$ với $(0 \le x \le 100)$ ta có:

$P'(x) = -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5000 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2}$

Ta có $P(0) = -100;\ P(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 607;\ P(100) = 400$

Vậy nhà máy A thu được lợi nhuận lớn nhất khi bán $50\sqrt{2} \approx 70,7$ tấn sản phẩm cho nhà máy B mỗi tháng.

Câu 3. Một hộp chứa 10 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Bạn Danh lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp, xem màu, rồi bỏ ra ngoài. Nếu viên bi Danh lấy ra có màu xanh, bạn Thanh sẽ lấy ra ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp, còn nếu viên bi Danh lấy ra có màu đỏ, bạn Thanh sẽ lấy ra ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp. Tính xác suất để Danh lấy được viên bi màu xanh, biết rằng tất cả các viên bi được hai bạn chọn ra có đủ cả hai màu.

Lời giải

Đáp án: 0,55

Gọi A là biến cố "Danh lấy được viên bi màu xanh" thì $\overline{A}$ là biến cố "Danh lấy được viên bi màu đỏ". Gọi B là biến cố "tất cả các viên bi được hai bạn chọn ra có đủ cả hai màu".

Ta có $P(A)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ và $P(\overline{A})=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$. Ta cần tính xác suất có điều kiện $P(A\mid B)$.

Khi A xảy ra thì trong hộp còn 9 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Để B xảy ra thì trong 2 viên bi mà Thanh bốc phải có ít nhất 1 viên bi màu đỏ. Từ đó ta có:

$$P(B\mid A)=\frac{C_{14}^2-C_9^2}{C_{14}^2}=\frac{55}{91}$$

Khi $\overline{A}$ xảy ra thì trong hộp còn 10 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Để B xảy ra thì trong 3 viên bi mà Thanh bốc, phải có ít nhất 1 viên màu xanh và ít nhất 1 viên màu đỏ. Từ đó ta có:

$$P(B\mid \overline{A})=\frac{C_{14}^3-C_{10}^3-C_4^3}{C_{14}^3}=\frac{90}{91}$$

Dùng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid \overline{A})=\frac{2}{3}\cdot\frac{55}{91}+\frac{1}{3}\cdot\frac{90}{91}=\frac{200}{273}$$

Từ đây, theo công thức tính xác suất có điều kiện, ta có:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{55}{91}}{\frac{200}{273}}=\frac{110}{273}\cdot\frac{273}{200}=\frac{11}{20}=0,55.$$

Câu 4. Trạm kiểm soát không quân đang theo dõi hai máy bay chiến đấu Su-30 và MiG-31. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị đo mỗi trục là 1km và xem mặt phẳng Oxy là mặt đất, tại cùng một thời điểm theo dõi ban đầu: máy bay chiến đấu Su-30 ở tọa độ $A(0;35;10)$, bay theo hướng vectơ $\vec{v}_1=(3;4;0)$ với tốc độ không đổi 900 (km/h) và máy bay chiến đấu MiG-31 ở tọa độ $B(31;10;9,28)$, bay theo hướng $\vec{v}_2=(5;12;0)$ với tốc độ không đổi 936 (km/h). Khu vực này có gió mạnh thổi với vận tốc 80 (km/h) theo hướng vectơ $\vec{u}=(-3;0;4)$, gió ảnh hưởng đến cả hai máy bay trong quá trình bay. Một khu vực không phận bị hạn chế bay đã được một quốc gia khác thiết lập, có dạng hình trụ với tâm đáy tại $C(178;430;0)$, bán kính đáy 7km, trục vuông góc với mặt đất và chiều cao 40km, máy bay MiG-31 có nhiệm vụ bay vào khu vực không phận bị hạn chế để thăm dò. Tại thời điểm máy bay chiến đấu MiG-31 bay ra khỏi khu vực không phận bị hạn chế thì khoảng cách của 2 máy bay chiến đấu là bao nhiêu km? (làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải

Đáp án: 70,8

- Xác định các vectơ vận tốc:

Gọi $\vec{a}$: vectơ vận tốc của máy bay Su-30

$\vec{b}$: vectơ vận tốc của máy bay MiG-31

$\vec{c}$: vectơ vận tốc của gió

$\vec{u}_1$: vectơ chỉ phương của đường thẳng quỹ đạo bay của máy bay Su-30

d_1 : đường thẳng quỹ đạo bay của máy bay Su-30

$\vec{u}_2$: vectơ chỉ phương của đường thẳng quỹ đạo bay của máy bay MiG-31

d_2 : đường thẳng quỹ đạo bay của máy bay MiG-31

(T) : mặt trụ có tâm $C(178;430;0)$ bán kính $r=7$.

$|\vec{v}_1|=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5 \Rightarrow \vec{a}=\dfrac{900}{5}\vec{v}_1=(540;720;0)$

$|\vec{v}_2|=13 \Rightarrow \vec{b}=\dfrac{936}{13}\vec{v}_2=(360;864;0)$

$|\vec{u}|=5 \Rightarrow \vec{c}=\dfrac{80}{5}\vec{u}=(-48;0;64)$

$\vec{u}_1=\vec{a}+\vec{c}=(492;720;64) \Rightarrow d_1:\begin{cases} x=492t \\ y=35+720t \\ z=10+64t \end{cases}$

$\vec{u}_2=\vec{b}+\vec{c}=(312;864;64) \Rightarrow d_2:\begin{cases} x=31+312t \\ y=10+864t \\ z=9,28+64t \end{cases}$

$(T):(x-178)^2+(y-430)^2=7^2.$

Vì không phận cấm bay có độ cao 40 km nên MiG-31 vào trong không phận thì độ cao tối đa của máy bay là $z \le 40 \Rightarrow 9,28+64t \le 40 \Leftrightarrow t \le 0,48$.

Tìm giao điểm của d_2 và (T).

Xét phương trình:

$(31+312t-178)^2+(10+864t-430)^2=49$

$\Leftrightarrow 843840t^2-817488t+197960=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0,490>0,48 \\ t=0,478<0,48 \end{array}\right.$

Dễ dàng nhận thấy MiG-31 đi vào không phận từ một điểm trên mặt trụ và đi ra tại một điểm trên đáy trên của khối trụ. Đáy trên của khối trụ nằm trong mặt phẳng có phương trình là $z=40$ hay $t=0,48$.

Suy ra, sau $0,48$ giờ MiG-31 nằm ở vị trí $\begin{cases} x=31+312.0,48=180,76 \\ y=10+864.0,48=424,72 \\ z=40 \end{cases} \Rightarrow M(180,76;424,72;40)$

Su-30 nằm ở vị trí $\begin{cases} x=492.0,48=236,16 \\ y=35+720.0,48=380,6 \\ z=10+64.0,48=40,72 \end{cases} \Rightarrow N(236,16;380,6;40,72)$

Khoảng cách giữa hai máy bay cần tìm là

$MN=\sqrt{(236,16-180,76)^2+(380,6-424,72)^2+(40,72-40)^2} \approx 70,8.$

Câu 5. Hệ thống lọc nước bể bơi vô cùng quan trọng khi tiến hành xây dựng công trình bơi lội để nguồn nước được làm sạch thường xuyên và giữ vệ sinh cho người bơi. Trong quá trình vận hành lọc nước thì lượng nước trong bể sẽ thay đổi theo thời gian. Lượng nước trong bể giảm nếu hệ thống đang xả nước bẩn ra khỏi bể và tăng nếu hệ thống đang cấp thêm nước sạch cho bể. Biết rằng 1 gallon gần bằng $3,785$ lít, dung tích của bể là 1000 gallon.

Hình vẽ hệ thống lọc nước tại bể bơi

Hàm số $f(t)$ biểu thị tốc độ thay đổi lượng nước trong bể theo thời gian t giờ, từ thời điểm 6 giờ sáng đến thời điểm 6 giờ chiều được cho bởi $f(t)=\begin{cases} 100t & (0 \le t \le 3) \\ -200t+900 & (3 \le t \le 6) \\ 100t-900 & (6 \le t \le 12) \end{cases}$ với mốc thời gian $t=0$ tại thời điểm 6 giờ sáng. Biết lúc 8 giờ sáng trong bể chứa 500 gallon nước. Hỏi ở thời điểm 4 giờ chiều trong bể chứa bao nhiêu gallon nước?

Lời giải

Đáp án: 350

Đặt $F(t)$ là hàm số thể hiện lượng nước trong bể sau t giờ kể từ 6 giờ sáng. Suy ra $F(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$. Vì hàm số $f(t)$ liên tục trên $[0;12]$ nên hàm số $F(t)$ cũng liên tục trên $[0;12]$.

Lượng nước lúc 4 giờ chiều ($t=10$) là

$$F(10)=[F(10)-F(6)]+[F(6)-F(3)]+[F(3)-F(2)]+F(2)$$

$$=\int_6^{10} f(t)\,dt+\int_3^6 f(t)\,dt+\int_2^3 f(t)\,dt+F(2)$$

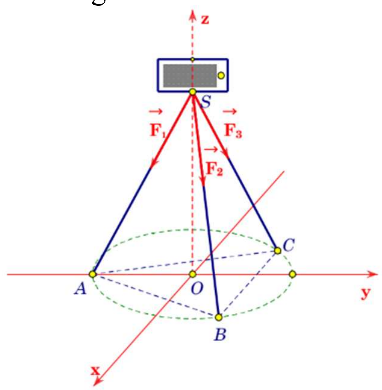
$$=\int_6^{10}(100t-900)\,dt+\int_3^6(-200t+900)\,dt+\int_2^3 100t\,dt+F(2)$$

$$=\left(50t^2-900t\right)\Big|_6^{10}+\left(-100t^2+900t\right)\Big|_3^6+\left(50t^2\right)\Big|_2^3+500$$

$$=-400+0+250+500=350$$

Vậy lúc 4 giờ chiều bể chứa 350 gallon nước.

Câu 6. Một chiếc điện thoại iphone được đặt trên một giá đỡ có ba chân với điểm đặt $S(0;0;20)$ và các điểm chạm mặt đất của ba chân lần lượt là $A(0;-6;0)$, $B\left(3\sqrt{3};3;0\right)$, $C\left(-3\sqrt{3};3;0\right)$ (đơn vị cm). Cho biết điện thoại có trọng lượng là $2N$ và ba lực tác dụng lên giá đỡ được phân bố như hình vẽ là ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, có độ lớn bằng nhau.



Biết tọa độ của lực $\overrightarrow{F_1}=(a;b;c)$, khi đó $T=2a+5b+6c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: -5

Ta có: $\overrightarrow{SA}=(0;-6;-20)$, $\overrightarrow{SB}=\left(3\sqrt{3};3;-20\right)$ và $\overrightarrow{SC}=\left(-3\sqrt{3};3;-20\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{SA}\right|=\left|\overrightarrow{SB}\right|=\left|\overrightarrow{SC}\right|$.

Do trọng tâm của tam giác ABC là O nên $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SO}$.

Do $SA=SB=SC$ và $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|$ nên $\begin{cases}\overrightarrow{SA}=k\overrightarrow{F_1}\\ \overrightarrow{SB}=k\overrightarrow{F_2}\\ \overrightarrow{SC}=k\overrightarrow{F_3}\end{cases}$ với $k>0$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right|=3\left|\overrightarrow{SO}\right|\Leftrightarrow\left|k\overrightarrow{F_1}+k\overrightarrow{F_2}+k\overrightarrow{F_3}\right|=60\Leftrightarrow k\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right|=60$.

Mà trọng lượng điện thoại bằng $2N$ nên ta có $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right|=2$ suy ra $k=30$.

Khi đó $\overrightarrow{F_1}=\dfrac{1}{30}\overrightarrow{SA}=\left(0;-\dfrac{1}{5};\dfrac{-2}{3}\right)\Rightarrow T=2\cdot0+5\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)+6\cdot\left(\dfrac{-2}{3}\right)=-5$.

ĐỀ 08 – GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (3,0 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5\left(x+1\right)>2$ là:

A. $\left(24;+\infty\right)$. **B.** $\left(9;+\infty\right)$. **C.** $\left(31;+\infty\right)$ **D.** $\left(25;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

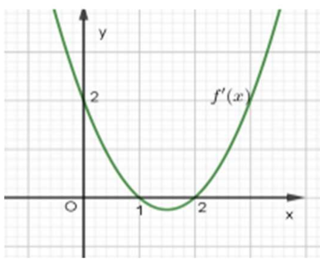
Điều kiện: $x>-1$

Bất phương trình ban đầu trở thành $x+1>5^2 \Leftrightarrow x>24$.

Kết hợp với điều kiện ta được $x>24$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(24;+\infty\right)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;0\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(0;+\infty\right)$. **D.** $\left(1;2\right)$.

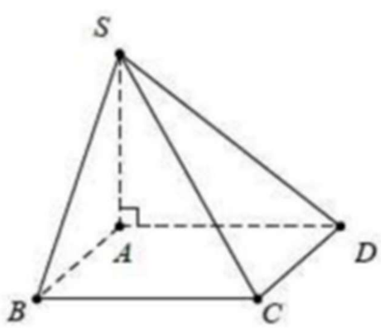
Lời giải

Chọn D

Ta thấy $f'\left(x\right)<0, \forall x\in\left(1;2\right)$.

Vậy hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ (tham khảo hình vẽ).



Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là:

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn C

Ta có hình chiếu của SB xuống mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là AB nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là $\widehat{SBA}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A:

$$\tan SBA=\frac{SA}{AB}=\frac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}\Rightarrow \widehat{SBA}=60^\circ.$$

Câu 4. Trong một đề thi trắc nghiệm môn Toán có loại câu hỏi trả lời dạng đúng sai. Một câu hỏi có 4 ý, mỗi ý học sinh chỉ cần trả lời đúng hoặc sai. Nếu 1 ý trả lời đúng đáp án thì được 0,1 điểm, đúng 2 ý được 0,25 điểm, đúng 3 ý được 0,5 điểm và đúng cả 4 ý được 1 điểm. Giả sử một thí sinh làm bài bằng cách chọn phương án ngẫu nhiên để trả lời cho 2 câu hỏi loại đúng sai này. Vậy có bao nhiêu cách chọn phương án để học sinh đó được đúng 1 điểm ở phần trả lời 2 câu hỏi này?

A. 9. **B.** 18. **C.** 6. **D.** 14.

Lời giải

Chọn B

Để học sinh đó được đúng 1 điểm thì xảy ra 2 trường hợp

TH1: Cả 2 câu đều làm đúng 3 ý: Có $C_4^3.C_4^3 = 16$ cách

TH2: Làm đúng 1 câu trọn vẹn cả 4 ý và sai cả 4 ý của câu 2: 2 cách.

Theo quy tắc cộng ta có 18 cách.

Câu 5. Phương trình $2^{x-2} = 3^{x^2+2x-8}$ có một nghiệm không nguyên dạng $x = \log_a b - 4$ với a,b là các số nguyên dương thuộc khoảng $(1;5)$. Khi đó, $a+2b$ bằng:

A. 6. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 14.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{x-2} = 3^{x^2+2x-8}$

$\Leftrightarrow (x-2)\log_3 2 = x^2 + 2x - 8$

$\Leftrightarrow (x-2)\log_3 2 = (x-2)(x+4)$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+4-\log_3 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \log_3 2 - 4 \end{array}\right.$.

Suy ra $a = 3; b = 2$.

Vậy $a + 2b = 7$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1;1;-2)$, $\vec{b} = (-2;1;4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$ là:

A. $(5;-1;-10)$. **B.** $(5;-1;10)$. **C.** $(5;1;10)$. **D.** $(5;1;-10)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} = (5;-1;-10)$.

Câu 7. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, vecto nào sau đây là vecto chỉ phương của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = 8 - 9t \end{cases}$?

A. $\overrightarrow{u_3} = (2;3;9)$. **B.** $\overrightarrow{u_1} = (-4;7;8)$. **C.** $\overrightarrow{u_2} = (4;7;8)$. **D.** $\overrightarrow{u_4} = (2;-3;-9)$.

Lời giải

Chọn D

Vecto chỉ phương của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = 8 - 9t \end{cases}$ là $\overrightarrow{u_4} = (2;-3;-9)$.

Câu 8. Giá tiền khoan giếng được tính như sau: Giá của mét đầu tiên là 60000 đồng, từ mét thứ hai trở đi, giá của mỗi mét khoan sau tăng 7% so với mét khoan trước đó. Nếu khoan giếng sâu $50m$ thì cần số tiền là:

A. 24492000. **B.** 24399000. **C.** 24392000. **D.** 24382000.

Lời giải

Chọn C

Giá của mét đầu tiên là 60000.

Giá của mét thứ hai là $60000.(1+0,07)$.

Giá của mét thứ ba là $60000.(1+0,07)^2$.

...

Giá của mét thứ 50 là $60000.(1+0,07)^{49}$.

Tổng số tiền khoan giếng là:

$T=60000+60000.(1,07)+60000.(1,07)^2+...+60000.(1,07)^{49}$

$=60000\dfrac{(1,07^{50}-1)}{0,07}\approx 24392000$ đồng.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G là trọng tâm của tam giác ABC. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$. **B.** $\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn C

➢ Xét phương án A.

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GC})=(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+3\overrightarrow{DG}=3\overrightarrow{DG}$.

Suy ra phương án A đúng.

➢ Xét phương án B. Theo quy tắc hiệu hai vecto ta có: $\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AD}$.

Suy ra phương án B đúng.

➢ Xét phương án C. $(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GD}$.

Suy ra phương án C sai.

➢ Xét phương án D. Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Suy ra phương án D đúng.

Câu 10. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2025^x$?

A. $F_4(x)=\dfrac{2025^x}{\ln 2025}$. **B.** $F_2(x)=2025^x\ln 2025$.

C. $F_1(x)=2025^x$. **D.** $F_3(x)=\dfrac{2025^x}{\log 2025}$.

Lời giải

Chọn A

$F(x)=\int f(x)dx=\int 2025^x dx=\dfrac{2025^x}{\ln 2025}+C$.

Câu 11. Số liệu thống kê điểm kiểm tra giữa kỳ I môn toán của lớp 11A:

Số điểm	$[4;7)$	$[7;9)$	$[9;10]$
Số học sinh	21	15	9

Điểm trung bình lớp 11A (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) là:

A. $7,13$. **B.** $7,11$. **C.** $7,15$. **D.** $7,18$.

Lời giải

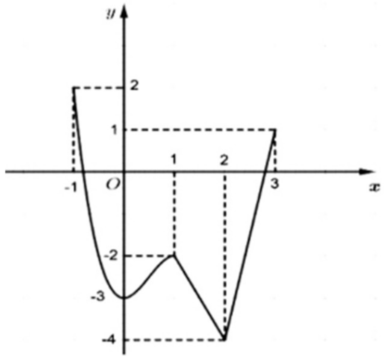
Chọn A

Bảng giá trị đại diện số điểm kiểm tra giữa kỳ của lớp 11A:

Số điểm	$[4;7)$	$[7;9)$	$[9;10]$
Giá trị đại diện	5,5	8	9,5
Số học sinh	21	15	9

Vậy điểm trung bình của lớp 11A là $\bar{x}=\dfrac{5,5.21+8.15+9,5.9}{45}\approx 7,13$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-1;3\right]$. Giá trị $M+m$ là:

A. -5. **B.** 2. **C.** -6. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta thấy, giá trị lớn nhất $M=2$ tại $x=-1$ và giá trị nhỏ nhất $m=-4$ tại $x=2$.

Vậy giá trị $M+m=2+\left(-4\right)=-2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai (4,0 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một khinh khí cầu bay với độ cao (so với mực nước biển) tại thời điểm t là $h\left(t\right)$, trong đó t tính bằng phút, $h\left(t\right)$ tính bằng mét. Tốc độ bay của khinh khí cầu được cho bởi hàm số $v\left(t\right)=-0{,}12t^2+1{,}2t$ với $v\left(t\right)$ tính bằng mét/phút. Tại thời điểm xuất phát $\left(t=0\right)$ khinh khí cầu ở độ cao 520m.

a) [1] $h\left(t\right)=-0{,}04t^3+0{,}6t^2\left(0\le t\le 29\right)$.

b) [2] Tại thời điểm $t=3$ phút độ cao của khinh khí cầu là $524{,}32\,\text{m}$.

c) [3] Độ cao tối đa của khinh khí cầu khi bay là 540m.

d) [4] Sau 15 phút từ khi xuất phát thì khinh khí cầu trở lại độ cao khi bắt đầu xuất phát.

Lời giải

a) Sai.

Ta có $v\left(t\right)=h'\left(t\right)$, suy ra $h\left(t\right)=\int v\left(t\right)\,\text{d}t=\int\left(-0{,}12t^2+1{,}2t\right)\text{d}t=-0{,}04t^3+0{,}6t^2+C$.

Vì $h\left(0\right)=520$, suy ra $C=520$.

Vậy $h\left(t\right)=-0{,}04t^3+0{,}6t^2+520 \quad \left(0\le t\le 29\right)$.

b) Đúng.

Ta có $h\left(3\right)=-0{,}04\left(3\right)^3+0{,}6\left(3\right)^2+520=524{,}32\left(m\right)$

c) Đúng.

$h\left(t\right)=-0{,}04t^3+0{,}6t^2\left(0\le t\le 29\right)$

$h'\left(t\right)=v\left(t\right)=0\Rightarrow -0{,}12t^2+1{,}2t=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=10 \end{array}\right.$.

$h\left(10\right)=-0{,}04\left(10\right)^3+0{,}6\left(10\right)^2+520=540$.

$h\left(0\right)=520$.

$h\left(29\right)=49{,}04$.

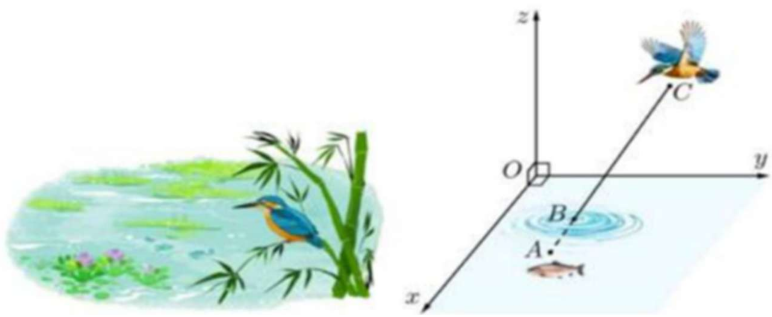
Do đó độ cao tối đa của khinh khí cầu khi bay là 540m.

d) Đúng.

Ta có $h\left(15\right)=-0{,}04\left(15\right)^3+0{,}6\left(15\right)^2+520=520=h\left(0\right)$.

Câu 2. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O nằm trên mặt nước, mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ là mặt nước, trục Oz hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang săn mồi ở vị trí C cách mặt nước 5 m, cách mặt phẳng

$(Oxz),(Oyz)$ lần lượt là $6m$ và $2m$, từ vị trí này nó phóng thẳng xuống vị trí con cá ở vị trí A, biết con cá cách mặt nước 50 cm, cách mặt phẳng $(Oxz),(Oyz)$ lần lượt là $1m$ và $1,5m$ (hình vẽ).



a) [1] Tọa độ điểm B lúc con chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước là $(a;b;c)$ thì $a+b+c=3$.

b) [2] Giả sử vận tốc của con chim bói cá là 40 km/h, vậy sau $0,19$ giây (làm tròn đến hàng phần trăm) con chim bói cá sẽ bay đến điểm B.

c) [3] Tọa độ các điểm $A(1,5;1;-0,5)$, $C(2;6;5)$.

d) [4] Phương trình đường thẳng AC là: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-6}{10}=\dfrac{z-5}{11}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có tọa độ điểm $C(2;6;5)$, $A(1,5;1;-0,5)$.

Điểm B thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $B(a;b;0)$.

Khi đó $\overrightarrow{AC}=(0,5;5;5,5)$; $\overrightarrow{AB}=(a-1,5;b-1;0,5)$

Vì A,B,C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$ hay $\dfrac{a-1}{0,5}=\dfrac{b-1}{5}=\dfrac{0,5}{5,5}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{17}{11}\\ b=\dfrac{16}{11}\end{cases}$

suy ra $B\left(\dfrac{17}{11};\dfrac{16}{11};0\right)$ nên $a+b+c=\dfrac{17}{11}+\dfrac{16}{11}+0=3$.

Đường thẳng AC đi qua C và nhận vectơ $\overrightarrow{AC}=(0,5;5;5,5)=0,5(1;10;11)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-6}{10}=\dfrac{z-5}{11}$.

Đổi 40 km/h = $\dfrac{100}{9}$ m/s.

Độ dài $BC=\sqrt{\left(\dfrac{17}{11}-2\right)^2+\left(\dfrac{16}{11}-6\right)^2+5^2}=\dfrac{5\sqrt{222}}{11}$.

Thời gian để con chim bói cá bay từ điểm C đến điểm B là $t=\dfrac{5\sqrt{222}}{11}:\dfrac{100}{9}\approx 0,61$ giây.

Dựa vào **Lời giải** phía trên ta có các đáp án

a) Đúng.
b) Sai.
c) Đúng.
d) Đúng.

Câu 3. Trước khi đưa một loại sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó. Kết quả thống kê như sau: có 105 người trả lời "sẽ mua"; có 95 người trả lời "không mua". Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời "sẽ mua" và "không mua" lần lượt là 70% và 30%. Gọi A là biến cố" Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm". Gọi B là biến cố "Người được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm"

a) **[1]** Xác suất $P(B)=\dfrac{21}{40}$ và $P(\overline{B})=\dfrac{19}{40}$.

b) **[2]** Xác suất có điều kiện $P(A|B)=0,3$.

c) **[3]** Xác suất $P(A)=0,51$.

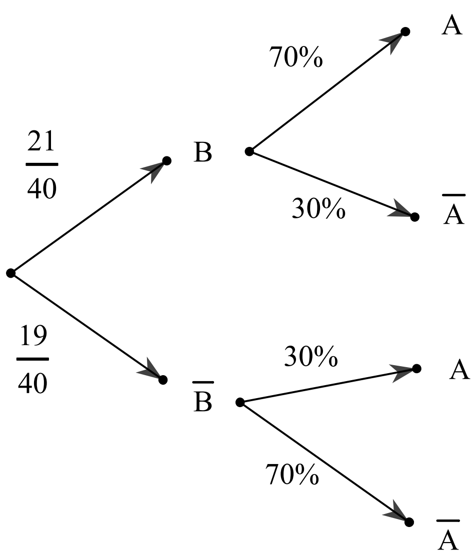
d) **[4]** Trong số những người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm có 70% người đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn (kết quả tính theo phần trăm được làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi A là biến cố" Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm".

Gọi B là biến cố "Người được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm".

Ta có sơ đồ hình cây như sau:



a) Đúng.

Xác suất $P(B)=\dfrac{105}{200}=\dfrac{21}{40}$ và $P(\overline{B})=\dfrac{95}{200}=\dfrac{19}{40}$.

b) Sai.

Xác suất có điều kiện $P(A|B)=70\%=0,7$.

c) Đúng.

$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})=\dfrac{21}{40}.0,7+\dfrac{19}{40}.0,3=0,51$.

d) Sai.

Ta có $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{21}{40}.0,7}{0,51}=\dfrac{49}{68}\approx 72\%$.

Trong số những người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm có 72% người đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+4}$.

a) **[1]** $f(24)=\dfrac{9}{116}$.

b) **[2]** Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận ngang.

c) **[3]** Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại là $x=4$.

d) **[4]** Tập giá trị của hàm số đã cho là đoạn $[a;b]$ thì $3a+4b=-2$.

Lời giải:

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

a) Đúng.

Vì $f\left(24\right)=\dfrac{2.24-3}{24^2+4}=\dfrac{9}{116}$.

b) Sai.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x^2}}=0$, tương tự $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x^2}}=0$

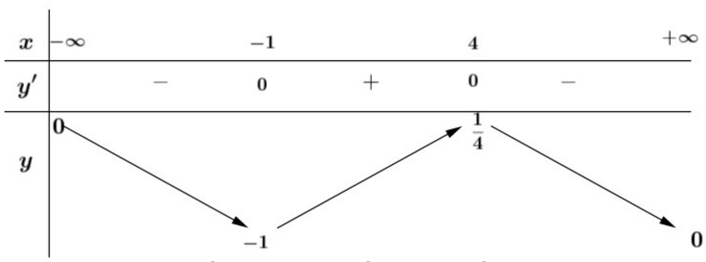
$\Rightarrow y=0\left(Ox\right)$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

c) Đúng.

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{2\left(x^2+4\right)-2x\left(2x-3\right)}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{-2x^2+6x+8}{\left(x^2+4\right)^2}$.

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -2x^2+6x+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, hàm số đạt cực đại tại $x=4$.

d) Đúng.

Dựa vào bảng biến thiên, tập giá trị của hàm số đã cho là đoạn $\left[-1;\dfrac{1}{4}\right]$

$\Rightarrow a=-1;b=\dfrac{1}{4}\Rightarrow 3a+4b=-2$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn (3,0 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Có hai lô hàng. Lô 1 có 7 chính phẩm và 3 phế phẩm. Lô 2 có 8 chính phẩm và 2 phế phẩm. Từ lô thứ nhất lấy ra 2 sản phẩm, từ lô thứ hai lấy ra 3 sản phẩm rồi trong số sản phẩm được lấy ra lại lấy tiếp ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Tính xác suất để trong 2 sản phẩm đó có ít nhất một chính phẩm. (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp số: 0,95

Gọi biến cố A_k :"có k chính phẩm trong 5 sản phẩm lấy ra ở 2 lô" với $k\in\left\{0;1;2;3;4;5\right\}$.

Gọi biến cố B :"lần thứ hai lấy được ít nhất một chính phẩm".

Ta có $P\left(A_0\right)=0$; $P\left(A_1\right)=\dfrac{C_3^2\cdot C_8^1\cdot C_2^2}{C_{10}^2\cdot C_{10}^3}=\dfrac{1}{225}$;

$P\left(A_2\right)=\dfrac{C_7^1\cdot C_3^1\cdot C_8^1\cdot C_2^2}{C_{10}^2\cdot C_{10}^3}+\dfrac{C_3^2\cdot C_8^2\cdot C_2^1}{C_{10}^2\cdot C_{10}^3}=\dfrac{14}{225}$;

$P\left(A_3\right)=\dfrac{C_7^1\cdot C_3^1\cdot C_8^2\cdot C_2^1}{C_{10}^2\cdot C_{10}^3}+\dfrac{C_7^2\cdot C_8^1\cdot C_2^2}{C_{10}^2\cdot C_{10}^3}+\dfrac{C_3^2\cdot C_8^3}{C_{10}^2\cdot C_{10}^3}=\dfrac{7}{25}$;

$P\left(A_4\right)=\dfrac{C_7^1\cdot C_3^1\cdot C_8^3}{C_{10}^2\cdot C_{10}^3}+\dfrac{C_7^2\cdot C_8^2\cdot C_2^1}{C_{10}^2\cdot C_{10}^3}=\dfrac{98}{225}$; $P\left(A_5\right)=\dfrac{C_7^2\cdot C_8^3}{C_{10}^2\cdot C_{10}^3}=\dfrac{49}{225}$

Xác suất để lần thứ hai không lấy được chính phẩm nào là

$P\left(\overline{B}\right)=P\left(\overline{B}\middle|A_1\right)\cdot P\left(A_1\right)+P\left(\overline{B}\middle|A_2\right)\cdot P\left(A_2\right)+P\left(\overline{B}\middle|A_3\right)\cdot P\left(A_3\right)+P\left(\overline{B}\middle|A_4\right)\cdot P\left(A_4\right)+P\left(\overline{B}\middle|A_5\right)\cdot P\left(A_5\right)$

$= \frac{C_4^2}{C_5^2} \cdot \frac{1}{225} + \frac{C_3^2}{C_5^2} \cdot \frac{14}{225} + \frac{C_2^2}{C_5^2} \cdot \frac{7}{25} + 0 + 0 = \frac{37}{750}$.

Xác suất của biến cố B là $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{37}{750} = \frac{713}{750} \approx 0,95$.

Câu 2. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn hàng sản xuất 8000 quả bóng pickleball. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Lời giải

Đáp số: 16

Gọi số máy móc công ty sử dụng là $x\left(x \in \mathbb{N}^*\right)$.

Số bóng công ty sản xuất được trong một giờ là $30x$ (quả).

Thời gian để công ty hoàn thành đơn hàng là $\frac{8000}{30x}$ (giờ)

Chi phí thiết lập cho toàn bộ máy móc là $200x$ (nghìn đồng).

Chi phí trả cho người giám sát trong một giờ là 192 (nghìn đồng).

Tổng chi phí hoạt động để công ty hoàn thành đơn hàng là

$T(x) = 200x + 192.\frac{8000}{30x} = 200x + \frac{51200}{x}$ (nghìn đồng).

Xét $T(x) = 200x + \frac{51200}{x}$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $200x, \frac{51200}{x}$, ta có:

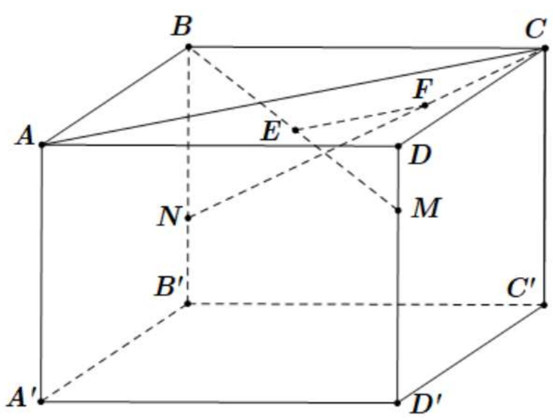
$200x + \frac{51200}{x} \geq 2.\sqrt{200x.\frac{51200}{x}}$

$\Leftrightarrow T(x) \geq 6400$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $200x = \frac{51200}{x} \Leftrightarrow x^2 = 256$. Khi đó $x = 16$.

Vậy để chi phí hoạt động thấp nhất thì công ty cần sử dụng 16 máy móc.

Câu 3. Phòng khách nhà bác Việt có dạng là một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = 6\,m$, $BC = 7\,m$, $AA' = 3\,m$. Để chuẩn bị đón Tết Nguyên Đán bác lên kế hoạch trang trí cho phần không gian của phòng khách bằng các dây đèn trang trí NC, BM, EF được mắc như hình vẽ sau:

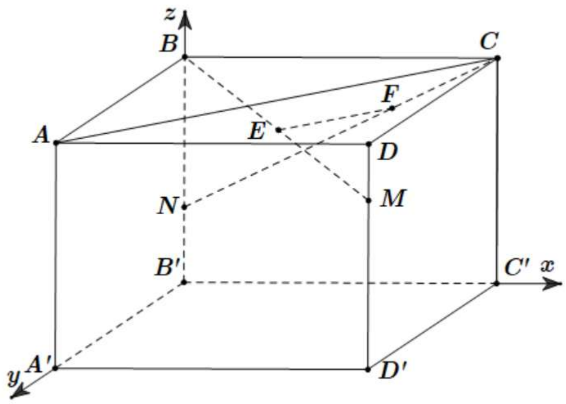


Biết rằng EF song song với AC và $BN = 2m; DM = 1m$. Giá mỗi mét dây đèn trang trí là 70000 đồng. Hỏi số tiền bác Việt cần dùng để mua dây đèn trang trí là bao nhiêu triệu đồng *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)*?

Lời giải

Đáp số: 1,42

Ta có: $\begin{cases} BD^2 = AB^2 + AD^2 = 6^2 + 7^2 = 85 \\ BM = \sqrt{BD^2 + DM^2} = \sqrt{85+1^2} = \sqrt{86} \\ CN = \sqrt{BN^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53} \end{cases}$.



Gắn hệ trục tọa độ không gian $(Oxyz)$, với $O \equiv B'$ như hình vẽ trên.

Ta có $A(0;6;3), C(7;0;3), B(0;0;3), M(7;6;2), N(0;0;1)$ và $\overrightarrow{AC} = (7;-6;0)$.

Phương trình BM qua $B(0;0;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{BM} = (7;6;-1)$ là $\begin{cases} x = 7t \\ y = 6t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Phương trình CN qua $N(0;0;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{NC} = (7;0;2)$ là $\begin{cases} x = 7t' \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t' \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} E \in BM \\ F \in CN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(7t;6t;-t+3) \\ F(7t';0;2t'+1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = (7t' - 7t; -6t; 2t' + t - 2)$.

Vì EF song song với AC nên $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \neq 0 : \overrightarrow{EF} = k.\overrightarrow{AC}$

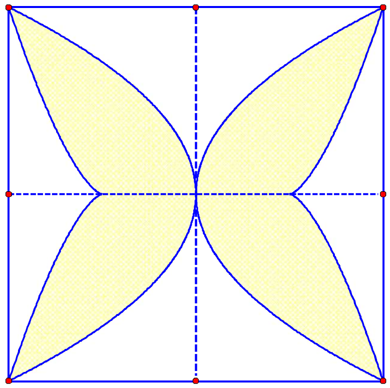
$$\Rightarrow \begin{cases} 7t' - 7t = 7k \\ -6t = -6k \\ 2t' + t - 2 = 0k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{4}{5} \\ t = \dfrac{2}{5} \\ k = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \left(\frac{14}{5}; \frac{-12}{5}; 0\right) \Rightarrow EF = \sqrt{\left(\frac{14}{5}\right)^2 + \left(\frac{-12}{5}\right)^2 + 0^2} = \frac{2\sqrt{85}}{5}.$$

Vậy số tiền (triệu đồng) bác Việt cần dùng để mua dây đèn trang trí là:

$(NC + BM + EF).0,09 = \left(\sqrt{53} + \sqrt{86} + \dfrac{2\sqrt{85}}{5}\right).0,07 \approx 1,42$ (triệu đồng).

Câu 4. Sàn của một tòa nhà được lát bằng những viên gạch hình vuông cạnh 40 cm như hình bên dưới:

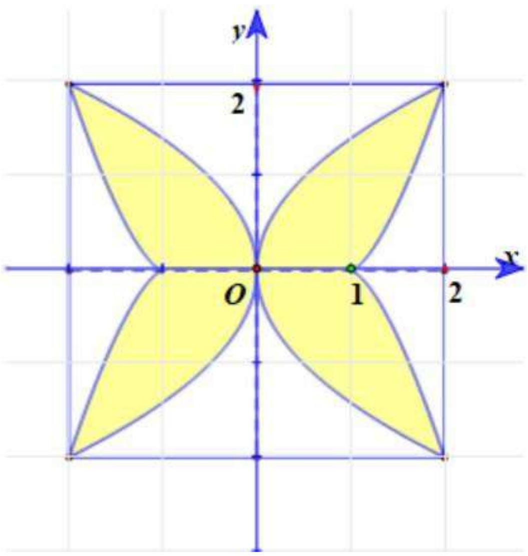


Biết rằng người thiết kế đã sử dụng các đường cong có phương trình $y^4 = 4x^2$ và $y^2 = 4\left(|x|-1\right)^3$ để tạo hoa văn cho viên gạch. Tính diện tích phần được tô màu (*kết quả quy tròn đến hàng đơn vị, đơn vị* cm^2)

Lời giải

Đáp số: 747

Ta có hệ trục Oxy như hình và đơn vị dm.

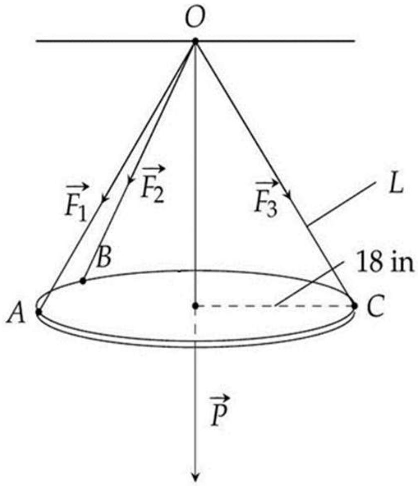


Xét khi $x \ge 0, y \ge 0$ ta có $y^4 = 4x^2 \Rightarrow y = \sqrt{2x}$ và $y^2 = 4\left(|x|-1\right)^3 \Rightarrow y = 2\sqrt{\left(x-1\right)^3}$

Diện tích phần tô đậm là $S = 4\left[\int_0^2 \sqrt{2x}\,dx - \int_1^2 2\sqrt{\left(x-1\right)^3}\right] = \frac{112}{15}\left(dm^2\right)$

Vậy $S \approx 747\left(cm^2\right)$.

Câu 5. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều như hình bên dưới.

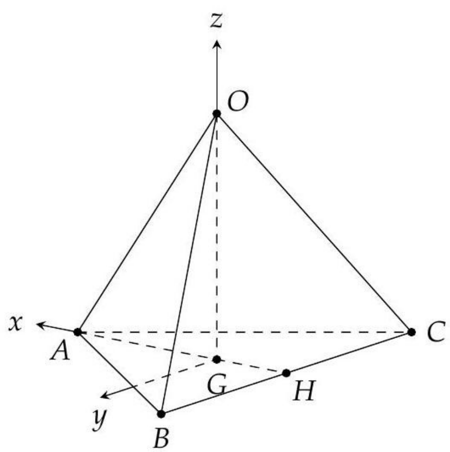


Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L. Trọng lượng của chiếc đèn là 24 N và bán kính của chiếc đèn là 18 inch (1 inch $= 2,54$ cm). Gọi F là độ lớn của các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ trên mỗi sợi dây. Biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N, hỏi chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là bao nhiêu inch?

Lời giải

Đáp số: 30

Lắp hệ trục $Gxyz$ như hình vẽ.



Bán kính của chiếc đèn là 18 nên $AG = 18$ suy ra $AB = 18\sqrt{3}$ và $BH = HC = 9\sqrt{3}$.

Ta có $G(0,0,0), A(18,0,0), B\left(-9,9\sqrt{3},0\right), C\left(-9,-9\sqrt{3},0\right)$.

Xét tam giác vuông AOG, suy ra $OG = \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{L^2 - 18^2}$ nên $O\left(0;0;\sqrt{L^2-18^2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{OA} = \left(18;0;-\sqrt{L^2-18^2}\right), \overrightarrow{OB} = \left(-9;9\sqrt{3};-\sqrt{L^2-18^2}\right)$ và $\overrightarrow{OC} = \left(-9;-9\sqrt{3};-\sqrt{L^2-18^2}\right)$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = L$ và $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right|$.

Tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho

$\overrightarrow{F_1} = c \cdot \overrightarrow{OA} = \left(18c;0;-c\sqrt{L^2-18^2}\right)$

$\overrightarrow{F_2} = c \cdot \overrightarrow{OB} = \left(-9c;9c\sqrt{3};-c\sqrt{L^2-18^2}\right)$

$\overrightarrow{F_3} = c \cdot \overrightarrow{OC} = \left(-9c;-9c\sqrt{3};-c\sqrt{L^2-18^2}\right)$

Suy ra $\vec{P} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \left(0;0;-3c\sqrt{L^2-18^2}\right)$, trong đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên bóng đèn.

Mà trọng lượng của bóng đèn là 24 N nên

$\left|\vec{P}\right| = 24 \Leftrightarrow 9c^2\left(L^2 - 18^2\right) = 24^2 \Leftrightarrow c = \dfrac{8}{\sqrt{L^2 - 18^2}}, \forall L \in (18;+\infty)$.

Vậy $F = \left|F_1\right| = \left|F_2\right| = \left|F_3\right| = \dfrac{8L}{\sqrt{L^2 - 18^2}}$.

Xét hàm số $F = \dfrac{8L}{\sqrt{L^2 - 18^2}}$ trên $(18;+\infty)$.

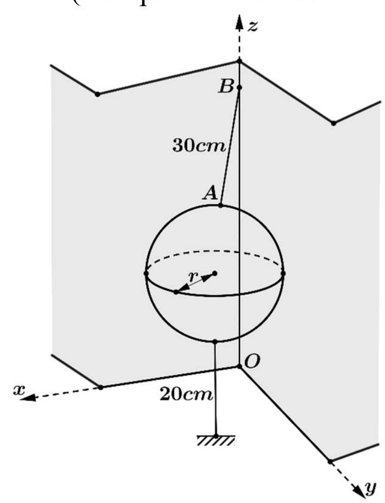
Ta có $F' = \dfrac{-2592}{\left(L^2 - 18^2\right)\sqrt{L^2 - 18^2}} < 0, \forall L \in (18;+\infty)$.

Mỗi sợi dây được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N.

Suy ra $F(L) \le 10 \Leftrightarrow F(L) \le F(30) \Leftrightarrow L \ge 30$.

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây bằng 30 inch thỏa mãn yêu cầu bài toán.

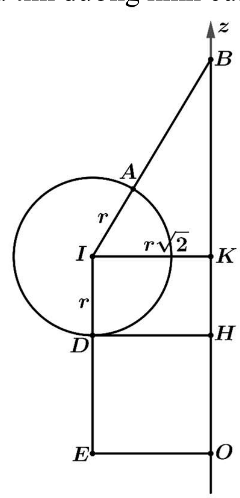
Câu 6. Một quả bóng hình cầu có bán kính r đang được treo trong một góc của tường nhà (hai bờ tường vuông góc với nhau). Một điểm B cố định nằm trên mép hai bờ tường và cách mặt đất 80 cm, sợi dây treo quả bóng có độ dài $AB = 30$ cm và đây cũng là độ dài ngắn nhất nối điểm B với mặt xung quanh của quả bóng. Biết rằng quả bóng tiếp xúc với hai bên bờ tường và điểm thấp nhất của quả bóng cách mặt đất 20 cm. Hỏi quả bóng có đường kính là bao nhiêu cm? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Đáp số: 38

Minh họa hình vẽ như sau. Đề bài yêu cầu tìm đường kính của quả cầu hay tính $2r$



Ta có thể tính được: $IK = r\sqrt{2}$; $DE = HO = 20$; $BK = 80 - 20 - r = 60 - r$; $IB = r + 30$

Áp dụng định lý Pytogo trong ΔBIK ta có: $KI^2 + BK^2 = IB^2 \Leftrightarrow \left(r\sqrt{2}\right)^2 + (60 - r)^2 = (r + 30)^2$

$$\Leftrightarrow 2r^2+3600-120r+r^2=r^2+60r+900 \Leftrightarrow 2r^2-180r+2700=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r=40+15\sqrt{3} \\ r=40-15\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Ta loại trường hợp $r=40+15\sqrt{3}$ do khoảng cách từ O đến B theo đề bài chỉ bằng 80 cm.

Vậy đường kính của quả cầu bằng $d=2r=2\left(40-15\sqrt{3}\right)\approx 38$ cm.

ĐỀ 09 – GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (3,0 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	21	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 21. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -6.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có điểm cực đại của hàm số đã cho là $x=-2$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=-1+2x+3x^2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục hoành có giá trị bằng

A. $-\dfrac{16}{27}$. **B.** $\dfrac{16}{27}$. **C.** $-\dfrac{32}{27}$. **D.** $\dfrac{32}{27}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow -1+2x+3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ x=-1. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục hoành có giá trị bằng

$$\int_{-1}^{\frac{1}{3}}\left|-1+2x+3x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{32}{27}.$$

Câu 3. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-x+2}{x+1}$ có phương trình là

A. $y=2x-3$. **B.** $y=2x+3$. **C.** $y=x+1$. **D.** $y=2x-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\dfrac{2x^2-x+2}{x+1}=2x-3+\dfrac{5}{x+1}$ nên phương trình đường tiệm cận xiên là $y=2x-3$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-z-1=0$. Đường thẳng nào dưới đây song song với mặt phẳng (P)?

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$. **B.** $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{1}$.

C. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{1}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;3;1)$ và đi qua điểm $A(-1;2;0)$.

Khi đó $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{n}_P=0\\ A\notin(P)\end{cases}$ nên đường thẳng $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{1}$ song song với mặt phẳng (P).

Câu 5. Thống kê độ tuổi tập thể dục thể thao hằng ngày trong một cụm dân cư có bảng số liệu sau:

Độ tuổi	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)
Số người	10	6	15	19	25

Tính phương sai của mẫu số liệu trên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 189,66. **B.** 13,68. **C.** 187,13. **D.** 187,03.

Lời giải:

Chọn C

Số trung bình là: $\bar{x}=\dfrac{15.10+25.6+35.15+45.19+55.25}{75}=\dfrac{611}{15}$

Phương sai của mẫu số liệu là:

$$s^2=\dfrac{10.(15-\frac{611}{15})^2+6.(25-\frac{611}{15})^2+15.(35-\frac{611}{15})^2+19.(45-\frac{611}{15})^2+25.(55-\frac{611}{15})^2}{75}\approx 187{,}13$$

Câu 6. Cho $\int_1^2 f(x)dx=-3$ và $\int_1^2 g(x)dx=4$. Giá trị tích phân $\int_1^2 (g(x)+2f(x))dx$ bằng

A. -2 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 5

Lời giải:

Chọn A

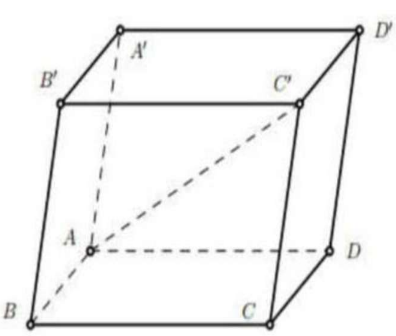
$$\int_1^2 (g(x)+2f(x))dx=\int_1^2 g(x)dx+2.\int_1^2 f(x)dx=4+2.(-3)=-2$$

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}$ bằng

A. $\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{A'C}$ **C.** $\overrightarrow{AC'}$ **D.** $\overrightarrow{C'A}$

Lời giải

Chọn C



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$$

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d?

A. $A(-1;1;2)$ **B.** $B(1;-1;2)$ **C.** $C(1;0;4)$ **D.** $D(1;0;-4)$

Lời giải:

Chọn D

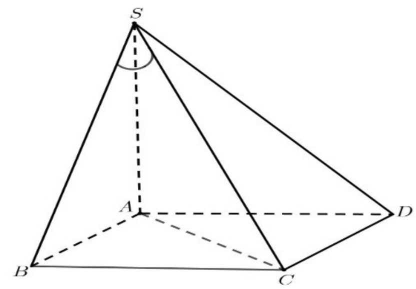
Vì $\dfrac{1+1}{2}=\dfrac{0-1}{-1}=\dfrac{-4+2}{-2}$ nên $D(1;0;-4)\in d$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (SAB) là góc nào dưới đây?

A. $\widehat{ASC}$. **B.** $\widehat{BSC}$. **C.** $\widehat{SBC}$. **D.** $\widehat{SAC}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

$\widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{(SC,SB)} = \widehat{BSC}$.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 5, u_4 = 11$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} u_2 = 5 \\ u_4 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d = 5 \\ u_1 + 3d = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 3 \end{cases}$.

Câu 11. Biết a, b là các số thực dương, khác 1 thỏa mãn $\log_a b = 3$. Giá trị $\log_{a^2} \frac{a}{\sqrt{b}}$ bằng

A. $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_{a^2} \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{1}{2}\left(\log_a a - \log_a \sqrt{b}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\log_a b\right) = -\frac{1}{4}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 2m - 1 = 0$, với m là tham số. Giá trị của tham số m để mặt cầu có bán kính là 3 bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Để mặt cầu có bán kính là 3 thì $\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2 - 2m + 1} = 3 \Leftrightarrow 7 - 2m = 9 \Leftrightarrow m = -1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai (4,0 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$.

a) [1] Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) [2] Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là điểm $I(1;2)$.

c) [3] Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm cùng phía đối với trục hoành.

d) [4] Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục tung. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm M là $y = -3x - 2$.

Lời giải

a) Đúng.
Hàm số xác định khi $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$.
Vậy tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
b) Sai.
Ta có $y=f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}=x+2+\dfrac{4}{x-1}$.
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$.
Do đó tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;3)$.
c) Sai.
Ta có $f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \Rightarrow y_1=-1 \\ x_2=3 \Rightarrow y_2=7 \end{array}\right..$$

Vì $y_1.y_2=(-1).7=-7<0$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục hoành.
d) Đúng.
Giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục tung là $M(0;-2)$.
Hệ số góc $k=f'(0)=-3$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M là $y=-3(x-0)-2 \Leftrightarrow y=-3x-2$.

Câu 2. Trên đường quốc lộ, một ô tô đang di chuyển với vận tốc $45\,km/h$. Cùng lúc, một đoàn tàu chạy song song với đường quốc lộ với vận tốc $60\,km/h$. Khi ô tô cách đuôi tàu $100\,m$ thì ô tô bắt đầu tăng tốc với vận tốc $v(t)=2,5t+b\,(m/s)$, với t là thời gian kể từ lúc ô tô bắt đầu tăng tốc. Khi đạt đến tốc độ tối đa cho phép $90\,km/h$ thì ô tô giữ nguyên vận tốc.

a) [1] Giá trị của b bằng $12,5$.
b) [2] Thời gian ô tô đạt vận tốc tối đa cho phép là $5s$.
c) [3] Khoảng cách giữa ô tô và đuôi tàu sau $3s$ là $51,25m$.
d) [4] Thời gian ô tô bắt kịp đuôi tàu kể từ lúc ô tô bắt đầu tăng tốc là $15,75s$.

Lời giải

a) Tại thời điểm ô tô bắt đầu tăng tốc, tức $t=0$. Ô tô đang di chuyển với vận tốc $45\,km/h=12,5\,m/s$ nên: $v(0)=2,5.0+b=12,5 \Rightarrow b=12,5$.
b) Tốc độ tối đa cho phép của ô tô là $90\,km/h=25\,m/s$.
Ta có $v(t)=2,5t+12,5=25 \Rightarrow t=5\,(s)$
Vậy sau $5s$ kể từ lúc tăng tốc, ô tô đạt vận tốc tối đa cho phép.
c) Sau $3s$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc, quãng đường ô tô đã đi được là:

$$\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3 (2,5t+12,5)dt=48,75\,(m).$$

Trong $3s$ quãng đường tàu đã đi được là: $\dfrac{50}{3}.3=50\,m$
Do vậy khoảng cách giữa đuôi tàu và ô tô là: $100-48,75+50=101,25\,m$.
d) Quãng đường ô tô đi được từ lúc tăng tốc đến khi vận tốc ô tô đạt mức tối đa là:

$$\int_0^5 v(t)dt=\int_0^5 (2,5t+12,5)dt=93,75\,(m)$$

Do vậy khoảng cách giữa đuôi tàu và ô tô là: $100-93.75+\dfrac{50}{3}.5=\dfrac{1075}{12}m$.
Vì vậy trong $5s$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc đến khi đạt vận tốc tối đa, ô tô vẫn chưa đuổi kịp đuôi tàu.

Gọi $x(s)$ là thời gian ô tô đuổi kịp đuôi tàu (không tính $5s$ đầu tiên kể từ lúc xe bắt đầu tăng tốc). Để ô tô đuổi kịp đuôi tàu thì: Hiệu giữa Quãng đường ô tô đi được và quãng đường tàu hoả đi được bằng $100m$, nên ta có: $93,75+25.x-\frac{50}{3}(x+5)=100 \Rightarrow x=10,75(s)$

Do đó để đuổi kịp đuôi tàu, thời gian ô tô đã đi kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là: $10,75+5=15,75\ (s)$

Câu 3. Khảo sát những người xem bộ phim hoạt hình vừa được phát hành cho thấy 70% người xem là trẻ em và 30% là người lớn. Trong số các trẻ em đến xem phim có 50% yêu thích bộ phim và khẳng định sẽ đi xem tiếp phần 2, 30% yêu thích bộ phim nhưng sẽ không xem tiếp phần 2; 20% còn lại không thích bộ phim và không xem tiếp phần 2. Trong số những người lớn đi xem phim có 20% yêu thích bộ phim và khẳng định sẽ xem tiếp phần 2, 10% yêu thích bộ phim nhưng sẽ không xem tiếp phần 2; 70% còn lại không thích bộ phim và không xem tiếp phần 2. Chọn ngẫu nhiên 1 người đã xem phim.

a) [1] Biết người được chọn là trẻ em, xác suất để người đó yêu thích bộ phim là $0,56$.

b) [2] Xác suất để người đó không xem tiếp phần 2 là $0,59$.

c) [3] Biết người đó sẽ xem tiếp phần 2 của bộ phim, xác suất để người đó là trẻ em lớn hơn $0,85$.

d) [4] Biết người đó yêu thích bộ phim, xác suất để người đó không xem tiếp phần 2 là $0,37$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi A là biến cố "Người đó là trẻ em"

B là biến cố "Người đó thích bộ phim"

C là biến cố "Người đó xem tiếp phần 2 bộ phim"

Xét người đi xem là trẻ em có $P(A)=0,7$.

Suy ra $P(BC)=50\%=0,5$, $P(B\overline{C})=30\%=0,3$, $P(\overline{B}\overline{C})=20\%=0,2$, $P(\overline{B}C)=0$.

Xét người đi xem là người lớn có $P(\overline{A})=0,3$.

$P(BC)=20\%=0,2$, $P(B\overline{C})=10\%=0,1$, $P(\overline{B}\overline{C})=70\%=0,7$, $P(\overline{B}C)=0$.

(a) Sai

Ta có $P(B|A)=0,5+0,3=0,8$.

(b) Đúng

Ta có $\overline{C}=\overline{C}AB\cup\overline{C}A\overline{B}\cup\overline{C}\overline{A}B\cup\overline{C}\overline{A}\overline{B}$.

$P(\overline{C})=P(\overline{C}AB)+P(\overline{C}A\overline{B})+P(\overline{C}\overline{A}B)+P(\overline{C}\overline{A}\overline{B})$

$=0,7\cdot0,3+0,7\cdot0,2+0,3\cdot0,1+0,3\cdot0,7=0,59$.

(c) Đúng

$P(C)=1-P(\overline{C})=0,41$.

$P(A|C)=\dfrac{P(AC)}{P(C)}$.

$P(AC)=P(AC\overline{B})+P(ACB)=0,7\cdot0+0,7\cdot0,5=0,35$.

Suy ra $P(A|C)=\dfrac{P(AC)}{P(C)}=\dfrac{0,35}{0,41}\approx0,854>0,85$.

(d) Đúng

$P(\overline{C}|B)=\dfrac{P(\overline{C}B)}{P(B)}$

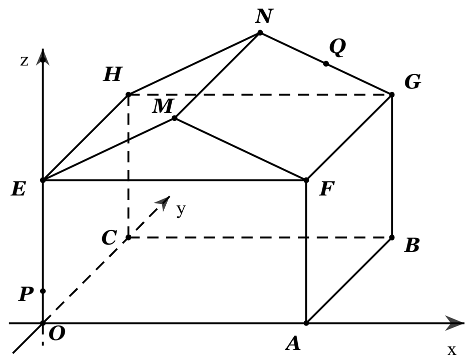
$P(\overline{C}B)=P(\overline{C}BA)+P(\overline{C}B\overline{A})=0,3\cdot0,7+0,1\cdot0,3=0,24$.

$P(B)=P(BA\overline{C})+P(BAC)+P(B\overline{A}C)+P(B\overline{A}\overline{C})$

$=0,7\cdot0,3+0,7\cdot0,5+0,3\cdot0,2+0,3\cdot0,1=0,65$.

Suy ra $P\left(\overline{C}|B\right)=\dfrac{0,24}{0,65}\approx 0,37$.

Câu 4. Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng $OAFME.CBGNH$ với $OAFE$ là hình chữ nhật, P là điểm trên đoạn thẳng OE sao cho $OP=\dfrac{1}{5}OE$ và Q là trung điểm của đoạn thẳng GN. Người ta mô hình hoá bằng cách chọn hệ trục toạ độ có gốc toạ độ là điểm O và các trục toạ độ tương ứng như hình vẽ dưới đây (đơn vị độ dài trên mỗi trục là $1\,\text{m}$). Biết $A(6;\,0;\,0)$, $C(0;\,20;\,0)$, $E(0;\,0;\,5)$, $M(3;\,0;\,8)$. Khi đó



a) [1] Toạ độ của $\overrightarrow{AP}$ là $(-6;\,0;\,1)$.

b) [2] Hai véc-tơ $\overrightarrow{EM},\overrightarrow{GN}$ vuông góc với nhau.

c) [3] Số đo góc nhị diện $[M,FG,E]$ bằng $30°$.

d) [4] Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí Q và đầu thu giữ liệu đặt tại vị trí P. Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ P đến E rồi từ E đến H, sau đó nối thẳng đến camera. Độ dài đoạn dây cáp tối thiểu bằng $\left(27+\sqrt{3}\right)$ m.

Lời giải

a) Đúng.

Ta có: $P(0;0;1)$, $A(6;\,0;\,0)$. Suy ra $\overrightarrow{AP}=(-6;0;1)$.

b) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{EM}=(3;0;3)\Rightarrow EM=\sqrt{3^2+0^2+3^2}=3\sqrt{2}$;

$G(6;20;5)$; $N(3;20;8)\Rightarrow\overrightarrow{GN}(-3;0;3)\Rightarrow GN=\sqrt{(-3)^2+0^2+3^2}=3\sqrt{2}$

Khi đó $\overrightarrow{EM}.\overrightarrow{GN}=3.(-3)+0.0+3.3=0$. Suy ra $\overrightarrow{EM},\overrightarrow{GN}$ vuông góc với nhau.

c) Sai.

Ta có $OAFME.CBGNH$ là hình lăng trụ đứng với $OAFE$ là hình chữ nhật nên $MNGF$ là hình chữ nhật. Khi đó $MF\perp GN;EF\perp GN$, suy ra góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[M,FG,E]$ là góc MFE.

Vì tam giác EMF vuông cân tại M nên góc MFE có số đo bằng 45°.

d) Sai.

Ta có: $G(6;20;5)$; $N(3;20;8)$; $H(0;20;5)$.

Q là trung điểm của đoạn thẳng GN nên $Q\left(\dfrac{9}{2};20;\dfrac{13}{2}\right)$.

$\Rightarrow\overrightarrow{HQ}=\left(\dfrac{9}{2};0;\dfrac{3}{2}\right)\Rightarrow HQ=\sqrt{\left(\dfrac{9}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

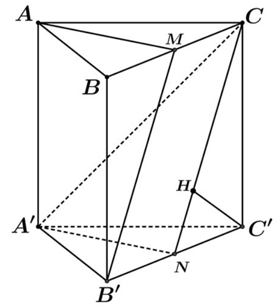
Ta có độ dài đoạn dây cáp tối thiểu là $PE+EH+HQ=4+20+\dfrac{3\sqrt{10}}{2}=24+\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn (3,0 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$, cạnh bên $AA'=3$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CN.

Lời giải

Đáp số: $1,5$



Theo giả thiết ta có $B'M \parallel CN$, $A'N \parallel AM \Rightarrow AM \parallel (CNA')$. Kẻ $C'H \perp CN$.

Do đó $d(AM,CN) = d(AM,(CNA')) = d(M,(CNA')) = d(B',(CNA')) = d(C',(CNA')) = C'H$.

Ta có $C'H = \dfrac{CC'.C'N}{CN} = \dfrac{3.\sqrt{3}}{\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}} = \dfrac{3}{2} = 1,5$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;1)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{-2}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M, song song với mặt phẳng $(Q): x-2y+z-3=0$ và tạo với d một góc nhỏ nhất. Gọi $A(-8;a;b)$ là một điểm nằm trên đường thẳng Δ. Tính giá trị $a+b$.

Lời giải

Đáp số: 36

Đường thẳng Δ đi qua M và tạo với d một góc nhỏ nhất bằng góc giữa d và mặt phẳng (Q).

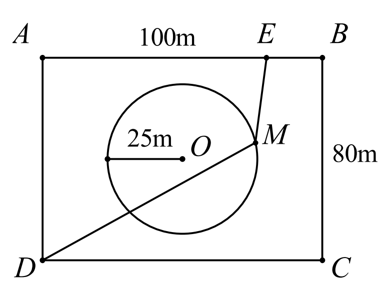
Khi đó Δ nhận vec tơ $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_d}\right],\overrightarrow{n_P}\right]$ làm vec tơ chỉ phương.

Ta có $\overrightarrow{n_P} = (1;-2;1)$, $\overrightarrow{u_d} = (1;-1;-2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_d}\right] = (5;3;1) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_d}\right],\overrightarrow{n_P}\right] = (5;-4;-13)$.

Phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 2+5t \\ y = 1-4t \\ z = 1-13t \end{cases}$.

Thay $t=-2$ ta được điểm $A(-8;9;27) \Rightarrow a+b = 36$.

Câu 3. Trên sân vận động, người ta tổ chức một cuộc thi chạy thông minh. Sân vận động là hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB = 100m$ và $BC = 80m$. Ở chính giữa sân người ta vẽ một hình tròn có tâm trùng với tâm của hình chữ nhật, bán kính bằng $25m$ như hình vẽ. Lấy E là một vị trí trên cạnh AB sao cho $EB = 20m$. Mỗi vận động viên cần xuất phát từ điểm M trên đường tròn và chạy theo cung đường $MDCBEMD$.



Vận động viên thắng cuộc là người chạy với quãng đường ngắn nhất. Tính độ dài quãng đường ngắn nhất vận động viên phải chạy. (đơn vị m, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

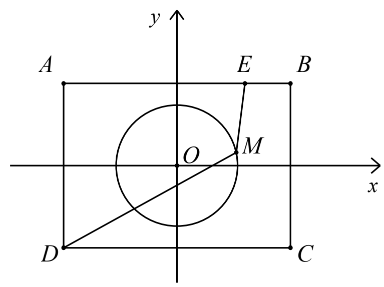
Đáp số: 352

Quãng đường vận động viên phải chạy là:

$$S = MD + DC + CB + BE + EM + MD = 2MD + EM + 200\ (m)$$

Như vậy quãng đường chạy ngắn nhất khi tổng $2MD + EM$ nhỏ nhất.

Gắn sân vận động vào một hệ trục tọa độ Oxy với tâm O của hình tròn trùng với gốc tọa độ, đường thẳng AB song song với trục Ox, đường thẳng AD song song với trục Oy, mỗi đơn vị dài trên trục tọa độ tương ứng với $1m$.



Với các kích thước như hình vẽ, ta có các điểm: $E(30;40)$ và $D(-50;-40)$.

Phương trình đường tròn $(O;25)$: $x^2 + y^2 = 625$.

Vì điểm $M(x;y)$ thuộc đường tròn $(O;25)$ nên $x^2 + y^2 = 625$.

Ta có: $EM = \sqrt{(x-30)^2 + (y-40)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 60x - 80y + 2500}$.

$= \sqrt{\left(x^2 + y^2 - 60x - 80y + 2500\right) + 3\left(x^2 + y^2\right) - 3 \cdot 625}$.

$= \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 60x - 80y + 625}$.

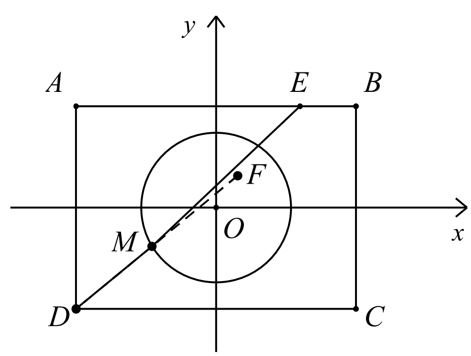
$= \sqrt{4\left(x^2 + y^2 - 15x - 20y + \dfrac{625}{4}\right)} = 2\sqrt{\left(x - \dfrac{15}{2}\right)^2 + (y-10)^2}$.

Gọi $F\left(\dfrac{15}{2};10\right)$. Khi đó $EM = 2FM$.

Suy ra: $2DM + EM = 2DM + 2FM = 2(DM + FM)$.

Với ba điểm M, D, F; ta có $MD + MF \geq DF$.

Dấu "$=$" xảy ra khi điểm M nằm giữa D và F.



Với $F\left(\dfrac{15}{2};10\right); D(-50;-40) \Rightarrow DF = \sqrt{\left(\dfrac{15}{2} + 50\right)^2 + (10+40)^2} = \dfrac{5\sqrt{929}}{2}$.

Suy ra quãng đường ngắn nhất mà vận động viên phải chạy là: $200+2.\dfrac{5\sqrt{929}}{2}\approx 352\left(m\right)$.

Câu 4. Nhân dịp kỷ niệm 50 năm ngày thành lập trường, các học sinh lựa chọn tham gia thi đấu thể thao hoặc biểu diễn văn nghệ. Lớp $12A$ có 60% số học sinh tham gia thi đấu thể thao và còn lại 40% số học sinh tham gia biểu diễn văn nghệ. Biết rằng các bạn nữ đều tham gia biểu diễn văn nghệ. Trong số các bạn nam có 20% tham gia văn nghệ và 80% tham gia thi đấu thể thao. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp. Biết rằng học sinh này tham gia biểu diễn văn nghệ, xác suất để học sinh này là nữ là bao nhiêu phần trăm?

Lời giải

Đáp số: **62,5**

Gọi A: "Bạn được chọn là nam" và B: "Bạn được chọn tham gia biểu diễn văn nghệ".

Khi đó, $\overline{A}$: "Bạn được chọn là nữ" và $\overline{B}$: "Bạn được chọn tham gia thi đấu thể thao".

Lớp $12A$ có 60% số học sinh tham gia thi đấu thể thao và còn lại 40% nên $P\left(B\right)=0,4$ và $P\left(\overline{B}\right)=0,4$.

Các bạn nữ đều tham gia biểu diễn văn nghệ nên $P\left(B\,|\,\overline{A}\right)=1$.

Trong số các bạn nam có 20% tham gia văn nghệ và 80% tham gia thi đấu thể thao nên ta có $P\left(B\,|\,A\right)=0,2$ và $P\left(\overline{B}\,|\,A\right)=0,8$.

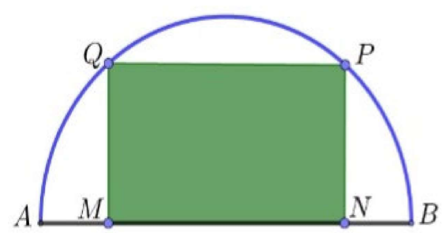
Ta có: $P\left(B\right)=P\left(B\,|\,A\right)P\left(A\right)+P\left(B\,|\,\overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right)$

$\Leftrightarrow 0,4=0,2\left(1-P\left(\overline{A}\right)\right)+1\cdot P\left(\overline{A}\right)\Leftrightarrow P\left(\overline{A}\right)=0,25$

Khi đó, xác suất để chọn ra một học sinh là nữ với điều kiện có tham gia biểu diễn văn nghệ là

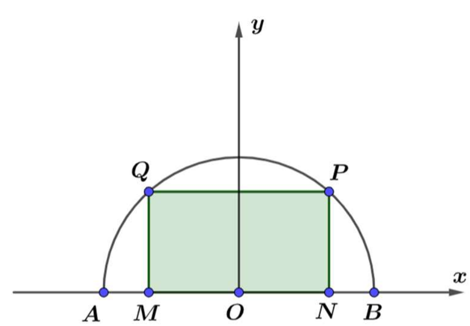
$$P\left(\overline{A}\,|\,B\right)=\frac{P\left(B\,|\,\overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(\overline{A}\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0,25}{0,4}=0,625=62,5\%.$$

Câu 5. Trước sân nhà A của một trường THPT có một mảnh đất là nửa hình tròn có đường kính $AB=10m$. Nhà trường muốn trồng hoa trong hình chữ nhật $MNPQ$ và phần đất còn lại trồng cỏ Nhật. Biết chi phí trồng hoa là 100 ngàn đồng/$1m^2$. Trồng cỏ Nhật hết 150 ngàn đồng/$1m^2$. Hỏi chi phí (làm tròn đến đơn vị ngàn đồng) hết ít nhất là bao nhiêu?



Lời giải

Đáp số: 4640



Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB, đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Theo bài ra ta có: $AB=10\left(m\right)\Rightarrow OA=OB=5\left(m\right)$

Đặt $MN=2a\left(m\right)$ với $0<a<5$, khi đó ta có: $OM=ON=a\left(m\right)$.

Phương trình đường tròn tâm O, đường kính AB là: $x^2+y^2=25\Rightarrow y^2=25-x^2$.

Do ta chỉ xét nửa đường tròn có tung độ dương nên suy ra $y=\sqrt{25-x^2}$.

Từ hệ trục Oxy, suy ra tọa độ các điểm: $O(0;0)$, $A(-5;0)$, $B(5;0)$, $M(-a;0)$, $N(a;0)$.

Do Q và P là hai điểm thuộc nửa đường tròn, suy ra: $\begin{cases} y_Q = \sqrt{25 - x_Q^2} \\ y_P = \sqrt{25 - x_P^2} \end{cases}$.

Mà $x_Q = x_M = a$ và $x_P = x_N = a$ suy ra $Q\left(-a;\sqrt{25-a^2}\right)$, $P\left(a;\sqrt{25-a^2}\right)$.

Có: $MN = 2a(m)$, $MQ = \sqrt{25-a^2}\,(m)$.

Diện tích của phần trồng hoa (hình chữ nhật) là: $S_1 = MN.MQ = 2a.\sqrt{25-a^2}$

Diện tích của nửa hình tròn là: $S = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi.5^2 = \frac{25\pi}{2}$.

Diện tích phần trồng cỏ Nhật là: $S_2 = S - S_1 = \frac{25\pi}{2} - 2a.\sqrt{25-a^2}$.

Chi phí để hoàn thành là: $T(a) = 100S_1 + 150S_2 = 100.2a.\sqrt{25-a^2} + 150.\left(\frac{25\pi}{2} - 2a.\sqrt{25-a^2}\right)$

$\Rightarrow T(a) = 200a.\sqrt{25-a^2} + 1875\pi - 300a.\sqrt{25-a^2} \Rightarrow T(a) = -100a.\sqrt{25-a^2} + 1875\pi$.

Xét hàm số: $f(a) = -100a.\sqrt{25-a^2} + 1875\pi \Rightarrow f'(a) = \frac{-2500 + 200x^2}{\sqrt{25-a^2}}$.

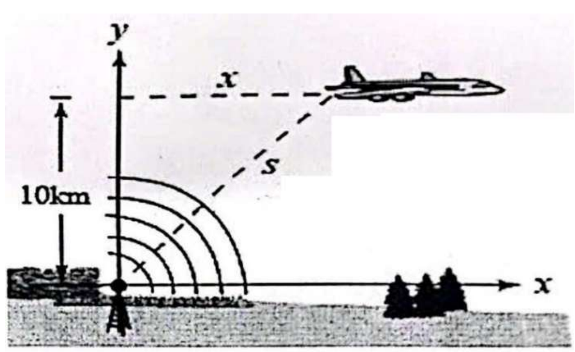
Xét $f'(a) = 0 \Leftrightarrow -2500 + 200a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 12,5 \Leftrightarrow a = \sqrt{12,5} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Ta có bảng biến thiên:

a	0		$\frac{5\sqrt{2}}{2}$		5
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$	T_{min}	$\nearrow$	

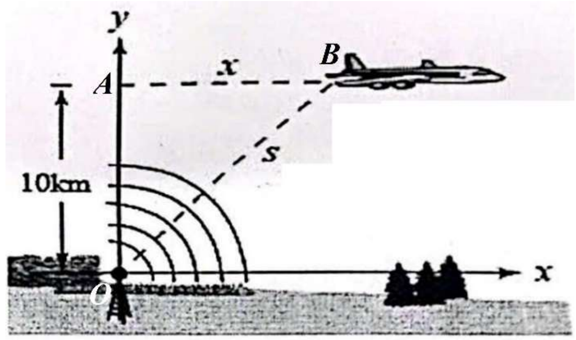
Quan sát bảng biến thiên, ta thấy chi phí thấp nhất là $T_{\min} = T\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \approx 4640$ (ngàn đồng).

Câu 6. Một máy bay đang bay theo phương ngang với vẫn tốc không đổi ở độ cao 10km so với mặt đất, thu phát tín hiệu qua một ăng-ten ra đa như hình vẽ. Khi máy bay cách ra đa 16km, ra đa phát hiện khoảng cách giữa máy bay ra đa thay đổi với tốc độ 546km/h. Tìm vận tốc của máy bay (đơn vị km/h, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp số: **699**



Gọi A là vị trí khi máy bay ở vị trí thẳng đứng so với ăng-ten ra đa, O là vị trí ăng-ten ra đa và B là vị trí máy bay cách ra đa 16km như đề bài.

Khi đó ta có: $OA = 10$ km, $OB = 16$ km, $AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = 2\sqrt{39}$ km.

Giả sử máy bay bay theo phương ngang với vận tốc không đổi là v_0 km/h ($v_0 > 0$).

Đặt mốc $t = 0$ giờ khi máy bay ở vị trí thẳng đứng so với ăng-ten ra đa.

Khoảng cách từ máy bay đến ăng-ten ra đa sau t giờ bay được: $f(t) = \sqrt{10^2 + (v_0.t)^2}$ km.

Khoảng cách giữa máy bay và ăng-ten ra đa thay đổi với tốc độ:

$v(t) = f'(t) = \dfrac{{v_0}^2.t}{\sqrt{10^2 + (v_0.t)^2}}$ km/h.

Tại vị trí B, khoảng cách giữa máy bay và ăng-ten ra đa thay đổi với tốc độ: $v(t) = 546$ km/h.

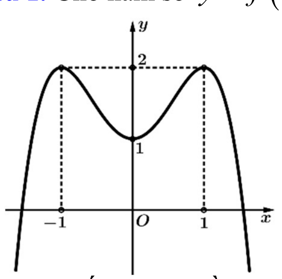
Suy ra: $t = \sqrt{\dfrac{546^2.100}{{v_0}^4 - 546^2.{v_0}^2}}$.

Khi đó ta có $AB = v_0.t \Leftrightarrow 2\sqrt{39} = v_0.\sqrt{\dfrac{546^2.100}{{v_0}^4 - 546^2.{v_0}^2}} \Leftrightarrow v_0 \approx 699$ km/h (vì $v_0 > 0$).

ĐỀ 10 – GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây



Hàm số đã cho đồng biến trong khoảng nào?

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Vậy đáp án lựa chọn là khoảng $(0;1)$.

Câu 2. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ suy ra hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) \le 1$

A. $(1;3]$. **B.** $[1;3]$. **C.** $(1;5)$. **D.** $[3;5]$.

Lời giải

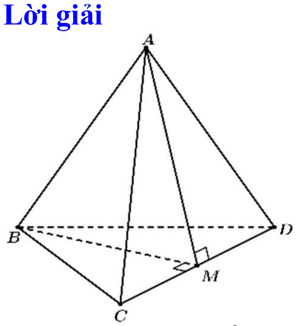
Ta có: $\log_2(x-1) \le 1 \Leftrightarrow 0 < x-1 \le 2 \Leftrightarrow 1 < x \le 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(1;3]$.

Câu 4. Trong không gian, cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ bằng

A. $4a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** a^2. **D.** 0.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD, do $ABCD$ là tứ diện đều nên ta có $AM \perp CD$, $BM \perp CD$.

Khi đó: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(2;0;1)$. **B.** $(0;-2;1)$. **C.** $(2;-2;0)$. **D.** $(0;0;1)$.

Lời giải

Hình chiếu của điểm $A(x;y;z)$ lên mặt phẳng Oxy là $A'(x;y;0)$.

Vậy hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ lên mặt phẳng Oxy là $(2;-2;0)$.

Câu 6. Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

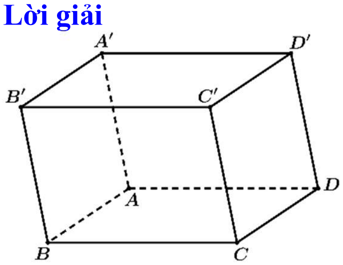
A. $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CC'}$.

B. $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB'}$.

C. $\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{C'D'}$.

D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Lời giải



Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$ nên đáp án **B** sai.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(3;3;-1)$. **B.** $(1;1;3)$. **C.** $(3;1;1)$. **D.** $(-1;-1;-3)$.

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (1;1;3)$.

Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và công sai $d = 3$. Tìm số hạng u_{10}.

A. $u_{10} = 28$. **B.** $u_{10} = 25$. **C.** $u_{10} = -29$. **D.** $u_{10} = -2.3^9$.

Lời giải

$u_{10} = u_1 + 9d = -2 + 9.3 = 25$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $3^x = 81$ là

A. $x = 4$. **B.** $x = 9$. **C.** $x = \log_{81} 3$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Ta có $3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu 10. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	$[0;20)$	$[20;40)$	$[40;60)$	$[60;80)$	$[80;100)$
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu trên là:

A. $[60;80)$. **B.** $[20;40)$. **C.** $[40;60)$. **D.** $[80;100)$.

Lời giải

Nhóm	$[0;20)$	$[20;40)$	$[40;60)$	$[60;80)$	$[80;100)$
Tần số	5	9	12	10	6
Tần số tích lũy	5	14	26	36	42

Số phần tử của mẫu là $n = 42$.

Ta có $\frac{n}{2} = \frac{42}{2} = 21$, mà $14 < 21 < 26$ suy ra nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 21. Vậy trung vị của mẫu số liệu trên thuộc nhóm $[40;60)$.

Câu 11. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ là

A. $x = -2$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

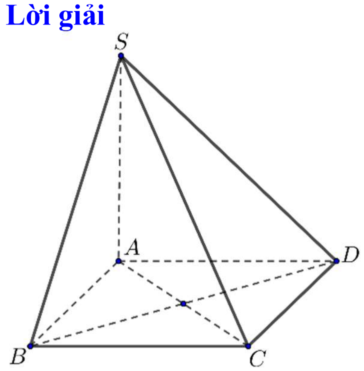
Ta có $\lim\limits_{x \to (-2)^+} y = \lim\limits_{x \to (-2)^+} \frac{x-1}{x+2} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to (-2)^-} y = \lim\limits_{x \to (-2)^-} \frac{x-1}{x+2} = +\infty$.

Vậy đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SAD)?

A. BC. **B.** SB. **C.** SC. **D.** CD.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \\ AD \subset (SAD), SA \subset (SAD) \\ AD \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f\left(x\right)=2\sin 2x+2x$.

a) [2] Phương trình $f'\left(x\right)=0$ có hai nghiệm thuộc $\left[0;\pi\right]$.

b) [3] Giá trị lớn nhất của $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$.

c) [1] Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'\left(x\right)=4\sin 2x+2$.

d) [1] $f\left(\pi\right)=\pi$.

Lời giải

a) Đúng. $f'\left(x\right)=4\cos 2x+2=0$.

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ 2x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

$x\in\left[0;\pi\right]\Rightarrow x=\frac{\pi}{3};x=\frac{2\pi}{3}$.

Phương trình $f'\left(x\right)=0$ có hai nghiệm thuộc $\left[0;\pi\right]$.

b) Đúng. Xét trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $f'\left(x\right)=0$ có nghiệm là $x=\frac{\pi}{3}$.

$f\left(0\right)=0;f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi;f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$.

Giá trị lớn nhất của $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$.

c) Sai. $f'\left(x\right)=4\cos 2x+2=0$.

d) Sai. $f\left(\pi\right)=2\pi$

Câu 2. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (tính theo lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V\left(t\right)=300\left(t^2-t^3\right)+4,5 \text{ với } 0\le t\le 0,5.$$

Gọi $V'\left(t\right)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0\le t\le 0,5$. Biết 1 lít xăng có giá là 21.000 đồng.

a) [1] Phương trình $V'\left(t\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

b) [1] Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là $1,5$ lít.

c) [2] Khi xăng chảy vào bình xăng thì tốc độ tăng thể tích là lớn nhất vào thời điểm ở giây thứ 21.

d) [2] Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Số tiền người mua phải trả là 787 500 đồng.

Lời giải

a) Sai. Ta có $V'\left(t\right)=300\left(2t-3t^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\\ t=\frac{2}{3}\notin\left[0;\frac{1}{2}\right]\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $V'\left(t\right)=0$ có một nghiệm trên đoạn $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

b) Sai. Với $t=0\Rightarrow V\left(t\right)=4,5$. Vậy lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là $4,5$ lít.

c) Sai. Ta có $V''\left(t\right)=300\left(2-6t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(t\right)=V'\left(t\right)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $V'(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t=\frac{1}{3}$ (phút) $=20$ (giây).

d) Đúng. Ta có $t=30$ (giây) $=\frac{1}{2}$ (phút).

Thể tích xăng sau khi bơm thêm 30 giây vào bình là $V\left(\frac{1}{2}\right)-4,5=300\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)=37,5$ lít.

Số tiền người mua phải trả là $37,5.21000=787500$ đồng.

Câu 3. Trong một cuộc thi thể thao về môn bắn súng. Các Vận động viên phải thực hiện bắn hạ mục tiêu đang di động trên mặt của khối cầu đặc có bán kính bằng $1m$. Chọn hệ trục tọa độ $(Oxyz)$ trong không gian có gốc O đặt tại vị trí xạ thủ A ngắm bắn, xem mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là $1m$. Biết khối cầu có tâm $I(7;24;3)$ và xem đường đi của viên đạn là một đường thẳng.

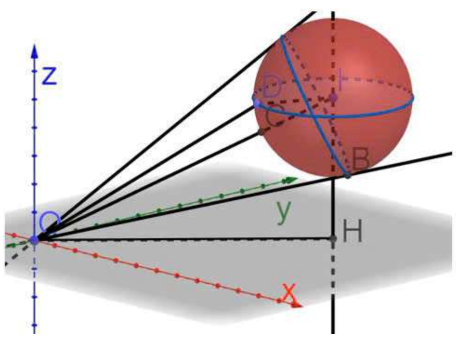
a) Vị trí xa nhất để xạ thủ A nhìn thấy và ngắm bắn mục tiêu là $25,2m$ (làm tròn đến hàng phần chục).

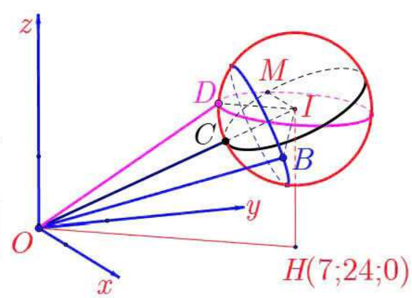
b) Biết vận tốc viên đạn là $\frac{54\sqrt{65}}{5}km/h$ thì khoảng thời gian ngắn nhất để xạ thủ A bắn trúng mục tiêu chưa tới $1s$.

c) Để các xạ thủ có thể dễ dàng bắn trúng mục tiêu hơn, ban tổ chức đã quyết định cho mục tiêu di chuyển trên đường tròn lớn nhất của mặt cầu và song song với mặt đất. Khi đó khoảng cách ngắn nhất từ vị trí xạ thủ A ngắm bắn đến mục tiêu là $3\sqrt{65}(m)$.

d) Xạ thủ A đang ngắm ở vị trí gần mục tiêu nhất. Tại thời điểm tuyển thủ A nổ súng thì mục tiêu đang ở vị trí $M(6;24;3)$ và di chuyển đến vị trí gần với xạ thủ nhất với vận tốc không đổi $v=1,25(m/s)$ và đi ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó xạ thủ A bắn trúng mục tiêu.

Lời giải





a) Đúng

Điểm xa nhất mà xạ thủ A thấy được là tiếp điểm B của tiếp tuyến kẻ từ O đến mặt cầu.

Ta có: $OB^2=OI^2-IB^2=7^2+24^2+3^2-1^2\Rightarrow OB=\sqrt{633}\approx 25,2(m)$

b) Đúng

Vì vận tốc không đổi nên khoảng thời gian ngắn nhất để xạ thủ A bắn trúng mục tiêu là khoảng thời gian cho quãng đường từ xạ thủ đến vị trí gần xạ thủ nhất.

Ta có: $OC=OI-R=\sqrt{7^2+24^2+3^2}-1=\sqrt{634}-1(m)$

$v=\frac{54\sqrt{65}}{5}(km/h)=3\sqrt{65}(m/s)$. Ta có: $t_{OC}=\frac{OC}{v}=\frac{\sqrt{634}-1}{3\sqrt{65}}\approx 0,99969(s)$ (chưa tới $1s$).

c) Đúng

Gọi $H(7;24;0)$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oxy). Vì đường tròn lớn nhất của mặt cầu nằm trong mặt phẳng song song với mặt đất nên khoảng cách ngắn nhất là OD với D là một trong hai giao điểm của mặt cầu, mặt phẳng $z=3$ và mặt phẳng (OIH).

Ta có: $ID=1; OH=\sqrt{7^2+24^2+0^2}=25; IH=3$.

$OHID$ là hình thang vuông tại I và H, suy ra: $OD=\sqrt{\left(OH-ID\right)^2+IH^2}=3\sqrt{65}m$.

d) Sai

Xạ thủ A ngắm mục tiêu ở. Xạ thủ A đang ngắm ở vị trí gần mục tiêu nhất nên viên đạn bay theo hướng của $\overrightarrow{OC}$. Thời gian viên đạn đến vị trí C: $t_{OC}\approx 0,99969s$.

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\sqrt{634}-1}{\sqrt{634}}.\overrightarrow{OI}\Rightarrow C\left(7.\frac{\sqrt{634}-1}{\sqrt{634}};24.\frac{\sqrt{634}-1}{\sqrt{634}};3.\frac{\sqrt{634}-1}{\sqrt{634}}\right).$$

Ta có: $\overrightarrow{IM}=\left(-1;0;0\right),\overrightarrow{IO}=\left(-7;-24;-3\right)\Rightarrow \cos\widehat{MIC}=\frac{7}{\sqrt{634}}\Rightarrow \widehat{MIC}=\alpha\approx 1,289$.

$l_{MC}=R.\alpha=\alpha$.

Khi đó, thời gian mục tiêu di chuyển từ M đến điểm C là $t_{MC}=\frac{l_{MC}}{v}=\frac{\alpha}{1,287}\approx 1,031s$.

Vậy xạ thủ không bắn trúng mục tiêu.

Câu 4. Sau năm học 2023-2024, thầy Thiên chủ nhiệm lớp 11A5 nhận thấy rằng lớp mình có 60% học sinh có kết quả xuất sắc, 40% học sinh có kết quả loại giỏi, không có học sinh khá và trung bình. Nhưng để nắm bắt chính xác hơn về năng lực tư duy môn toán của từng học sinh nên thầy Thiên đã cho học sinh làm bài kiểm tra Toán trong 90 phút. Sau khi chấm bài xong, thầy Thiên thấy rằng trong số học sinh loại giỏi có 8 học sinh từ 9 điểm Toán trở lên và có 75% học sinh xuất sắc trong các học sinh được điểm toán từ 9 trở lên. Biết lớp 11A5 có 40 học sinh.

a) Tỉ lệ học sinh có điểm Toán từ 9 trở lên của lớp 11A5 là 80%.

b) Học sinh xuất sắc kiểm tra môn Toán đều lớn hơn hoặc bằng 9 điểm.

c) Những học sinh có điểm Toán dưới 9 điểm đều là học sinh loại giỏi.

d) Biết rằng tỉ lệ học sinh có điểm Toán **trên 9** điểm của học sinh giỏi bằng 37,5% số học sinh giỏi và trong số học sinh có điểm bằng 9 có 50% học sinh xuất sắc. Khi đó, có 22 học sinh kết quả xuất sắc có điểm trên 9.

Lời giải

Số học sinh xuất sắc là: $60\%.40=24$ (học sinh)

Số học sinh giỏi là: $40\%.40=16$ (học sinh)

a) Đúng

Gọi x (học sinh) là số học sinh đạt từ 9 điểm trở lên trong các học sinh xuất sắc $\left(0\le x\le 24\right)$.

Số học sinh đạt từ 9 điểm trở lên là $x+8$ (học sinh)

Theo đề bài, ta có phương trình $\frac{x}{x+8}.100\%=75\%\Leftrightarrow x=24$.

Tỉ lệ học sinh có điểm toán từ 9 điểm trở lên của lớp 12A5 là $\frac{24+8}{40}.100\%=80\%$.

b) Đúng

Theo câu a ta có số học sinh xuất sắc từ 9 điểm trở lên là 24 học sinh và bằng tổng số học sinh xuất sắc.

c) Đúng

Từ câu a ta có số học sinh dưới 9 điểm đều là học sinh giỏi và bằng: $40-(24+8)=8$ (học sinh).

d) Đúng

Số học sinh giỏi có điểm trên 9 là: $16.37,5\%=6$ (học sinh).

Số học sinh giỏi có điểm bằng 9 là: $16-\left(8+6\right)=2$ (học sinh).

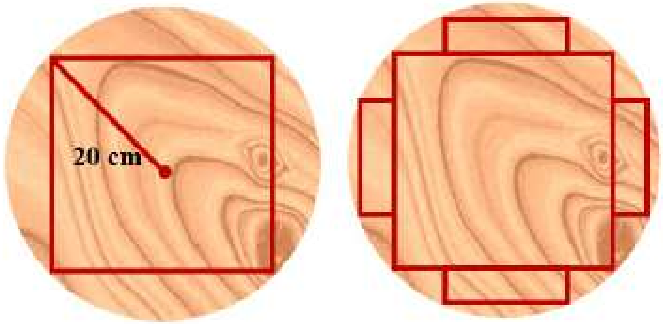
Do trong số học sinh có điểm bằng 9 có 50% học sinh xuất sắc nên số học sinh xuất sắc có điểm bằng 9 là 2 (bằng số học sinh giỏi có điểm bằng 9).

Vậy có 22 học sinh kết quả xuất sắc có điểm trên 9.

	<9	=9	>9	**Tổng**
HS Giỏi	8	2	6	16
HS Xuất sắc	0	2	22	24
Tổng	8	4	28	40

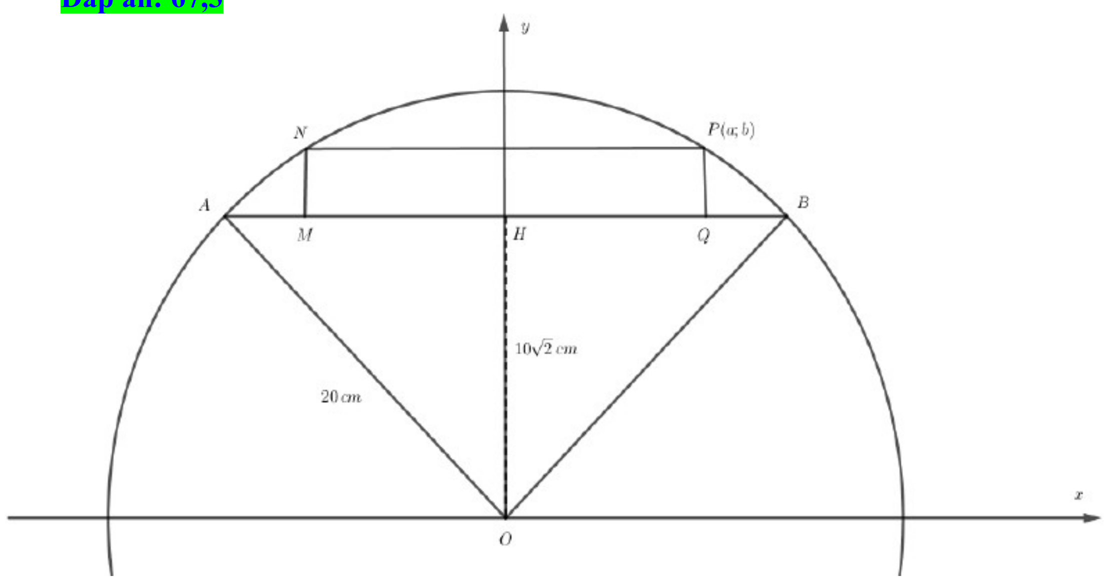
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một thanh dầm hình hộp chữ nhật được cắt từ một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy bằng $20cm$ sao cho thanh dầm có diện tích mặt cắt ngang lớn nhất, tức là thanh dầm có mặt cắt ngang là hình vuông. Sau khi cắt thanh dầm đó, người ta lại cắt bốn tấm ván hình hộp chữ nhật từ bốn phần còn lại của khúc gỗ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Xác định diện tích mặt cắt ngang tối đa của mỗi tấm ván (theo đơn vị cm^2 và làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: 67,3



Vì ΔOAH là tam giác vuông cân tại H nên ta được $OH = HA = HB = 10\sqrt{2}$.

Xem phần còn lại của tấm bìa là phần đồ thị bên trên AB của đường tròn $y = \sqrt{20^2 - x^2}$.

Gọi $P(a;b), 0 < a < 10\sqrt{2}$ với $b = \sqrt{20^2 - a^2}$.

Ta có, diện tích tấm bìa hình chữ nhật được cắt ra là $S_{MNPQ} = 2a.\left(\sqrt{400 - a^2} - 10\sqrt{2}\right)$.

Xét hàm số $f(x) = 2x.\left(\sqrt{400 - x^2} - 10\sqrt{2}\right), x \in \left(0;10\sqrt{2}\right)$.

Ta có $f'(x) = 2\left(\sqrt{400 - x^2} - 10\sqrt{2}\right) - \dfrac{2x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = \dfrac{800 - 4x^2 - 20\sqrt{2}.\sqrt{400 - x^2}}{\sqrt{400 - x^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 800 - 4x^2 - 20\sqrt{2}.\sqrt{400 - x^2} = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{2}.\sqrt{400 - x^2} = 200 - x^2$

$$50\left(400 - x^2\right) = 40000 - 400x^2 + x^4 \Leftrightarrow x^4 - 350x^2 + 20000 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{350 + \sqrt{42500}}{2} \\ x^2 = \dfrac{350 - \sqrt{42500}}{2} \end{array}\right.$$

Với điều kiện đã cho, ta được $x = \sqrt{175 - \sqrt{10625}}$.

Do đó $\max S_{MNPQ} = 2\sqrt{175 - \sqrt{10625}}.\left(\sqrt{400 - \left(175 - \sqrt{10625}\right)} - 10\sqrt{2}\right)$

$= 2.\sqrt{175 - \sqrt{10625}}.\left(\sqrt{225 + \sqrt{10625}} - 10\sqrt{2}\right) \approx 67,3\left(cm^2\right)$.

Câu 2. Hai bạn cùng chơi trò chơi như sau, bạn thứ nhất bỏ vào hộp 2 viên bi thì bạn thứ hai sẽ bỏ vào số bi gấp đôi số bi của người kia đồng thời lấy ra khỏi hộp 1 viên, cuộc chơi dừng lại nếu số bi trong hộp lớn hơn 2000 viên. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu lần chơi thì dừng cuộc chơi?

Lời giải

Đáp án: 11

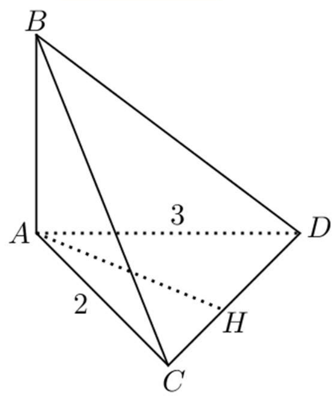
Theo quy tắc chơi đã cho ta thấy cuộc chơi theo dãy số $u_1 = 2, u_{n+1} = 2u_n - 1, \forall n \geq 1$.

Biến đổi $u_{n+1} - 1 = 2(u_n - 1), \forall n \geq 1$ và đặt $v_n = u_n - 1, \forall n \geq 1$, ta có $v_{n+1} = 2v_n$ là cấp số nhân có công bội $q = 2, v_1 = 1$. Tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân là $S_n = \dfrac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$, do đó tổng số bi trong hộp là: $T_n = S_n + n = 2^n + n - 1 > 2000 \Rightarrow n \geq 11$.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (ACD)$, tam giác ACD vuông tại A và $AC = 2,\ AD = 3$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp án: 1,66



Kẻ $AH \perp CD$ tại H (1)

Ta có $AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp AH$ tại A (2)

Từ (1) và (2) ta có $d(AB, CD) = AH$.

Mặt khác ta có ΔACD vuông tại A và có AH là chiều cao nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36} \Rightarrow AH = \frac{6\sqrt{13}}{13} \Rightarrow d(AB, CD) = \frac{6\sqrt{13}}{13} \approx 1,66.$$

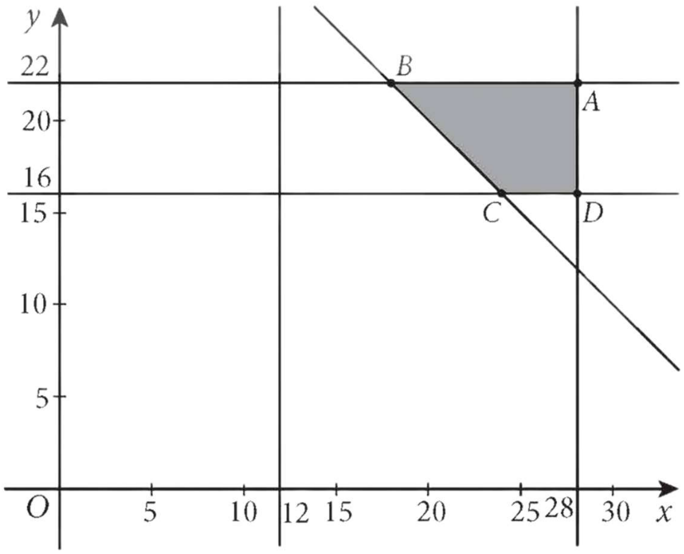
Câu 4. Một công ty bán hàng toàn quốc đang lên kế hoạch tổ chức cuộc họp bán hàng tại Đà Nẵng. Giá vé máy bay khứ hồi thấp nhất từ Hà Nội đến Đà Nẵng là 2 triệu đồng và giá vé khứ hồi thấp nhất từ Thành phố Hồ Chí Minh đến Đà Nẵng là 2,4 triệu đồng. Có 28 đại diện bán hàng ở Hà Nội và 22 đại diện bán hàng ở Thành phố Hồ Chí Minh có thể đến Đà Nẵng dự cuộc họp này. Tổng cộng ít nhất 40 đại diện bán hàng từ Hà Nội và Thành phố Hồ Chí Minh phải tham dự cuộc họp này với ít nhất 12 người từ Hà Nội và 16 người từ Thành phố Hồ Chí Minh. Để tổng chi phí vé máy bay là nhỏ nhất cần cử x_0 đại diện bán hàng ở Hà Nội và y_0 đại diện bán hàng ở Thành phố Hồ Chí Minh đến dự cuộc họp bán hàng ở Đà Nẵng. Tìm x_0.

Lời giải

Đáp án: 24

Gọi x, y lần lượt là số đại diện bán hàng ở Hà Nội và Thành phố Hồ Chí Minh sẽ tham dự cuộc họp.

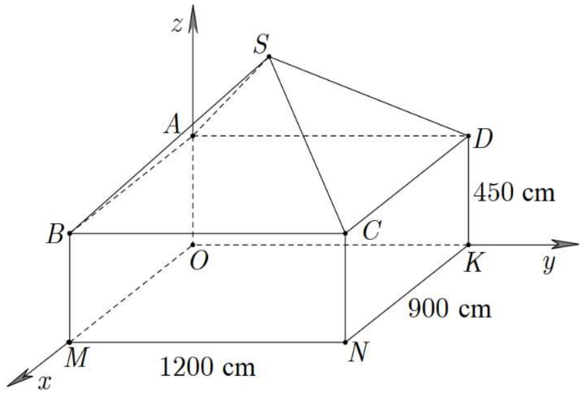
Theo đề bài, ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 12 \leq x \leq 28 \\ 16 \leq y \leq 22 \\ x + y \geq 40 \end{cases}$.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình này là miền tứ giác ABCD như hình vẽ với
A(28; 22), B(18; 22), C(24; 16) và D(28; 16).
Tổng chi phí vé máy bay là F(x; y) = 2x + 2, 4y (triệu đồng).
Tính giá trị của biểu thức F(x; y) tại các đỉnh của ngũ giác, ta được:
F(28; 22) = 108,8; F(18; 22) = 88,8; F(24; 16) = 86,4; F(28; 16) = 94,4.
Vậy tổng chi phí vé máy bay nhỏ nhất là 86,4 triệu đồng khi x = 24 và y = 16 tức là cần cử 24 đại diện bán hàng ở Hà Nội và 16 đại diện bán hàng ở Thành phố Hồ Chí Minh đến dự cuộc họp.

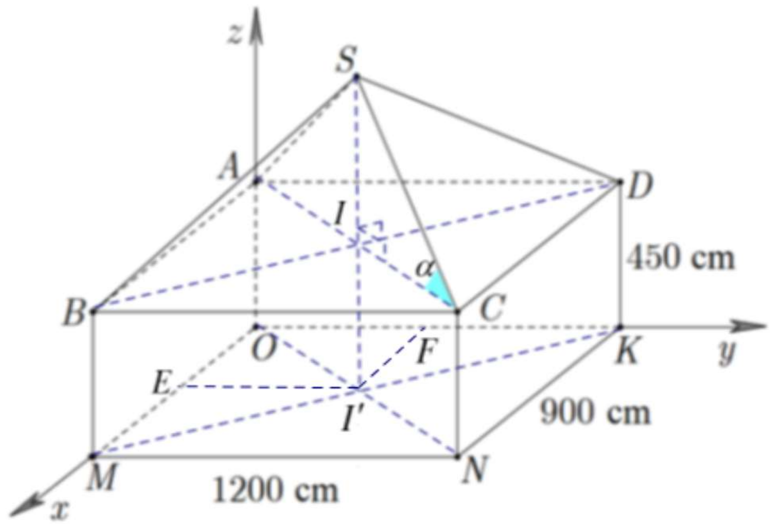
Vậy $x_0 = 24$.

Câu 5. Một ngôi nhà gồm hai phần. Phần thân nhà dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.OMNK$ có chiều dài $1200\,cm$, chiều rộng $900\,cm$, chiều cao $450\,cm$. Phần mái nhà dạng hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt đáy một góc α có $\tan\alpha = \frac{1}{5}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho M thuộc Ox, K thuộc Oy, A thuộc Oz (như hình vẽ). Biết $S(a;b;c)$ (đơn vị của a, b, c là centimet). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$?



Lời giải

Đáp án: 1650



Gọi $I = AC \cap BD$, $I' = ON \cap MK$.
Lấy $E \in Ox$ và $F \in Oy$ sao cho $I'E \perp Ox$ và $I'F \perp Oy$.

Cạnh bên SC tạo với mặt đáy $ABCD$ một góc α có $\tan\alpha = \frac{1}{5}$.

Do đó: $\frac{SI}{IC} = \tan\alpha = \frac{1}{5}$; $IC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{900^2 + 1200^2} = 750$.

Suy ra: $SI = IC.\tan\alpha = \frac{1}{5}.750 = 150$ và $SI' = SI + II' = 150 + 450 = 600$.

$OE = \frac{1}{2}OM = 450$, $OF = \frac{1}{2}OK = 600$. Khi đó $S(450; 600; 600)$.

Suy ra: $P = a + b + c = 1650$.

Câu 6. Có hai hộp: hộp I có 5 quả bóng trắng và 7 quả bóng đỏ, hộp II có 10 quả bóng trắng và 15 quả bóng đỏ, các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên hai quả bóng từ hộp I bỏ vào hộp II. Sau đó, lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp II. Xác suất để quả bóng được lấy ra từ hộp II là quả bóng được chuyển từ hộp I sang, biết rằng quả bóng đó có màu trắng là $\frac{a}{b}$ (là phân số tối giản). Tính $a + b$.

Lời giải

Đáp án: 14

Gọi X là biến cố "lấy được bóng trắng từ hộp II sau khi đã chuyển 2 bóng từ hộp I sang".
Gọi Y là biến cố "2 bóng được chuyển từ hộp I sang hộp II".

Ta có công thức Bayes: $P(Y|X) = \frac{P(X|Y)\cdot P(Y)}{P(X)}$. Trong đó:

- $P(X|Y)$ là xác suất lấy được bóng trắng từ hộp II, biết rằng bóng đó được chuyển từ hộp I sang.
- $P(Y)$ là xác suất 2 bóng được chuyển từ hộp I sang hộp II.
- $P(X)$ là xác suất lấy được bóng trắng từ hộp II sau khi chuyển 2 bóng từ hộp I sang.

□Tính $P(Y)$: Do ta không cần tính xác suất để 2 bóng được chuyển từ hộp I sang hộp II, biến cố này luôn xảy ra. Nên ta có thể bỏ qua yếu tố $P(Y)$ trong công thức Bayes.

□Tính $P(X)$: Có 3 trường hợp xảy ra khi chuyển 2 bóng từ hộp I sang hộp II:

-TH1. Chuyển 2 bóng trắng: Xác suất là $\frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{10}{66}$

- Hộp II có 12 bóng trắng và 15 bóng đỏ.

- Xác suất lấy được bóng trắng từ hộp II là: $\frac{12}{27}$

- TH2. Chuyển 1 bóng trắng và 1 bóng đỏ: Xác suất là $\frac{C_5^1\cdot C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{35}{66}$

- Hộp II có 11 bóng trắng và 16 bóng đỏ.

- Xác suất lấy được bóng trắng từ hộp II là: $\frac{11}{27}$

- TH3. Chuyển 2 bóng đỏ: Xác suất là $\frac{C_7^2}{C_{12}^2} = \frac{21}{66}$

- Hộp II có 10 bóng trắng và 17 bóng đỏ.

- Xác suất lấy được bóng trắng từ hộp II là: $\frac{10}{27}$

Vậy, $P(X) = \frac{10}{66} \cdot \frac{12}{27} + \frac{35}{66} \cdot \frac{11}{27} + \frac{21}{66} \cdot \frac{10}{27} = \frac{120 + 385 + 210}{66 \cdot 27} = \frac{715}{1782} = \frac{65}{162}$

□Tính $P(X \mid Y)$: Ta cần tính xác suất để bóng lấy ra từ hộp II là bóng trắng được chuyển từ hộp I sang.

- TH1. Trường hợp chuyển 2 bóng trắng: Xác suất lấy được bóng trắng chuyển từ hộp I là $\frac{2}{27}$.

- TH2. Trường hợp chuyển 1 bóng trắng và 1 bóng đỏ: Xác suất lấy được bóng trắng chuyển từ hộp I là $\frac{1}{27}$.

- TH3. Trường hợp chuyển 2 bóng đỏ: Xác suất lấy được bóng trắng chuyển từ hộp I là 0.

Vậy, $P(X \mid Y) = \frac{10}{66} \cdot \frac{2}{27} + \frac{35}{66} \cdot \frac{1}{27} + \frac{21}{66} \cdot 0 = \frac{20 + 35}{66 \cdot 27} = \frac{55}{1782} = \frac{5}{162}$

Áp dụng công thức Bayes: $P(Y \mid X) = \frac{P(X \mid Y)}{P(X)} = \frac{\frac{5}{162}}{\frac{65}{162}} = \frac{5}{65} = \frac{1}{13}$

Vậy $\frac{a}{b} = \frac{1}{13}$, suy ra $a = 1$ và $b = 13$. suy ra $a + b = 1 + 13 = 14$.